Решения. Вариант 76

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Васильково — 4; Иваново — 2.
Ответ: 142.

Задание 2

Путь занимает $16 + 12 = 28$ клеток.
Длина пути равна $28 \cdot 2 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 32 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\frac{22}{25} \cdot 60 + \frac{26}{10} \cdot 60 = 208{,}8$.
Ответ: 208,8.

Задание 5

Васильково: $5 \cdot 52 + 1 \cdot 659 + 3 \cdot 894 = 3601$ руб.
Иваново: $5 \cdot 60 + 1 \cdot 680 + 3 \cdot 864 = 3572$ руб.
Камышино: $5 \cdot 67 + 1 \cdot 650 + 3 \cdot 849 = 3532$ руб.
Журавушка: $5 \cdot 57 + 1 \cdot 635 + 3 \cdot 873 = 3539$ руб.
Наименьшая стоимость — 3532 руб.
Ответ: 3532.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $8^2 = 64$. Поэтому значение выражения равно $25 - 64 = -39$.
Ответ: -39.

Задание 7

Значение числа $\frac{111}{11}$ приблизительно равно 10,091. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $17 + 2\sqrt{119} + 7 - 2\sqrt{119} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Разложение на множители: $(x)(x - 3) = 0$. Корни: 0 и 3.
Требуемый корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 13 = 487$. Вероятность равна $\dfrac{487}{500} = 0{,}974$.

Ответ: $0{,}974$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 111}{14 + 23} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $-5x > -30$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 6)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $18 + 11 \cdot 3 = 51$.

Ответ: 51.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$, поэтому каждый равен 53°.

Ответ: 53.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Ответ: 45.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{28 + 12}{2} \cdot 10 = 200$.

Ответ: 200.

Задание 18

Основания равны 2 и 4, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{2+4}{2} \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-100}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2 - 100 = (x-10)(x+10)$.
Критические точки: -10, 2, 10. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -10 и 10 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-10]\cup(2;10]$.

Задание 21

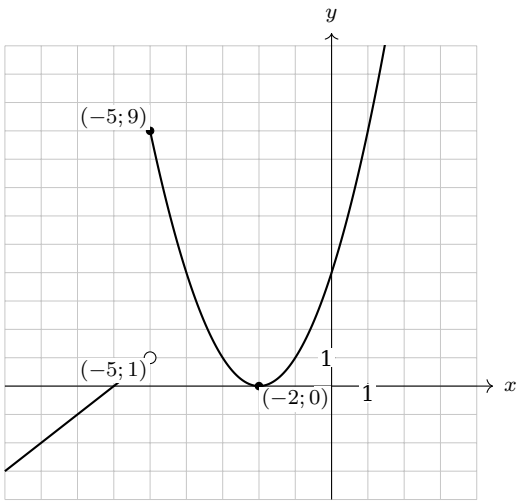
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 12 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 18 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 18$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+18)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+18} = \dfrac{1}{12}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+18) = 12(2x+18)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 18$ и $x = -12$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{12}$, поэтому время совместной работы равно 12 ч.
Ответ: 18 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+2)^2+0, & x\geq -5,\\ x+6, & x<-5.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2;0)$, оставленная при $x\geq -5$. Точка $(-5;9)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+6$ при $x<-5$. Его конечная точка $(-5;1)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $1\leq m\leq 9$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>9$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 9 включена, поскольку точка $(-5;9)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $1\leq m\leq 9$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=9$, $CK=18$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=9$. Сторона $BC=BK+CK=27$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(9+27)=72$.
Ответ: 72.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM=AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD=MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD=AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM=CD/2=AB/2$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 8^2$.
После раскрытия скобок получаем $8R = 80$. Поэтому $R = 10$.
Ответ: 10.