Решения. Вариант 77

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 3; Озёрное — 4; Берёзовка — 1.
Ответ: 341.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $21 + 9 + 40 = 70$ км.
Ответ: 70.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 9 и 40 км.
Её длина $\sqrt{9^2 + 40^2} = 41$ км.
Ответ: 41.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 21 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 41 км.
Время: $\dfrac{21}{80} \cdot 60 + \dfrac{41}{50} \cdot 60 = 64{,}95$ мин.
Ответ: 64,95.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{70 \cdot 8}{100} \cdot 73 = 408{,}8$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{50 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 73 = 346{,}75$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{21 \cdot 8 + 41 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 73 = 406{,}975$ руб.

Наименьшая стоимость — $346{,}75$ руб.
Ответ: 346,75.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем 4.
Ответ: 4.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{302}$ приблизительно равно $17{,}378$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$10 + 1 = 11$.
Ответ: 11.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\dfrac{11}{4}$.
$x = -7{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-22 \neq 0$.
Ответ: $-7{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $24 + 5 + 11 = 40$. Благоприятных исходов 5, поэтому вероятность равна $\dfrac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{16{,}8 \cdot 28}{28 - 16{,}8} = 42$ Ом.
Ответ: 42.

Задание 13

Нули множителей: -11 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-11; 1)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 3^3 = 135$.
Ответ: 135.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{22 \cdot 10}{2} = 110$.

Ответ: 110.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.

Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.

Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 64x - 320 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 5) - 64(x + 5) = 0$.

Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x + 5)(x^2 - 64) = (x + 5)(x - 8)(x + 8) = 0$.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -5;\ 8$.

Ответ: $-8;\ -5;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 16 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $102{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \dfrac{1}{2}) + 16t = \dfrac{205}{2}$. Отсюда $27t = 108$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $16 \cdot 4 = 64$ км. Время движения первого $\dfrac{7}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.

Ответ: 64 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+4x+3)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

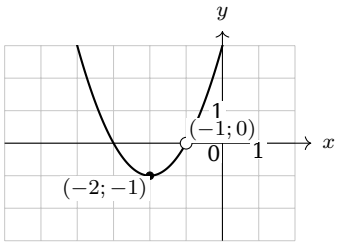
Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$.

Строим параболу с вершиной $(-2; -1)$ и выколотой точкой $(-1; 0)$.

При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 6$, $AC = 18$, $NC = 19$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 19$. По подобию $\dfrac{x}{x+19} = \dfrac{6}{18}$.

Отсюда $18x = 6(x+19)$, то есть $12x = 114$. Получаем $BN = \dfrac{19}{2}$.

Ответ: $\dfrac{19}{2}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.

Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.

Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 65$, $BC = 50$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{250}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 65 - \dfrac{250}{13} = \dfrac{595}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 50 \cdot \dfrac{\frac{595}{13}}{65} = \dfrac{5950}{169}$.

Ответ: $\dfrac{5950}{169}$.