Решения. Вариант 78

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м³ — печь № 2, 14 м³ — печь № 3, 8 м³ — печь № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

$V = 3{,}9 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}1 = 19{,}656$ м³.
Ответ: 19,656.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $30 : 2 = 15$ см и 36 см.
$R = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$ см.
Ответ: 39.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $33400 \cdot \dfrac{88}{100} = 29392$ руб.
Ответ: 29392.

Задание 5

Объём парной равен $19{,}656$ м³. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $33400 + 1150 = 34550$ руб.
Печь № 3: $27600 + 1150 + 5850 = 34600$ руб.
Наименьшая сумма — 34550 руб.
Ответ: 34550.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}7$.
$4{,}7 : 0{,}2 = 23{,}5$.
Ответ: 23,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{58}$ приблизительно равно $-7{,}616$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{2 \cdot 2 - 3} = 6^1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

$8x = -124 - (-12) = -112$, поэтому $x = -14$.
Ответ: -14.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 100$; их 25. Вероятность равна $\dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 760{,}5}{13^2} = 9$ кг.

Ответ: 9.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le -1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; -1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_6 = 11 + (6-1) \cdot (-5) = -14$.
Ответ: -14.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 57° - 35° = 88°$.
Ответ: 88.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{32^2 + 60^2} = 68$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 68 : 2 = 34$.
Ответ: 34.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 17 \cdot 12 = 204$.
Ответ: 204.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 7, поэтому площадь равна $8 \cdot 7 = 56$.
Ответ: 56.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{25}{x-60}+\dfrac{25}{x+60}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 60$ и $x\neq -60$.
Умножим уравнение на $(x-60)(x+60)$: $25(x+60)+25(x-60)=x^2-3600$.
Получим $x^2-50x-3600=0$, или $(x-25)^2=4225=65^2$.
Поэтому $x=25-65=-40$ или $x=25+65=90$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-40;\ 90$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80-x$ кг, причём $0<x<80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{25}{100}x+\dfrac{70}{100}(80-x)=\dfrac{40}{100}\cdot 80$.
Умножим на 100: $25x+5600-70x=3200$. Поэтому $45x=2400$ и $x=\dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

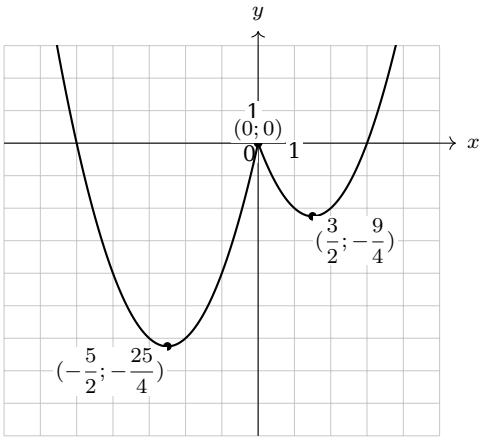
Постройте график функции $y = x^2 + x - 4|x|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t + 0$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 65, а основание равно 50. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 60 = 1500$.

По формуле $R = \frac{abc}{4S}$ получаем $R = \frac{65 \cdot 65 \cdot 50}{4 \cdot 1500} = \frac{845}{24}$.

Ответ: $\frac{845}{24}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.

Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.

Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 40$, $CD = 85$, основание $BC = 5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 85 - 5 = 80$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 40$, $AP = BC = 5$, $PD = AD - BC = 75$.
В треугольнике CPD выполняется $40^2 + 75^2 = 85^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 40.
Площадь $S = \dfrac{80 + 5}{2} \cdot 40 = 1700$.
Ответ: 1700.