Решения. Вариант 79

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{10+12+14+8}{4}=11$ ГБ.
Ответ: 11.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 200 минут и 0 ГБ.
Плата: $540+200\cdot 2+0\cdot 60=940$ руб.
Ответ: 940.

Задание 5

За месяц № 7 использовано 250 минут и 12 ГБ.
«Основной»: $540+0\cdot 2+0\cdot 60=540$ руб.
«Расширенный»: $785+0\cdot 2+0\cdot 50=785$ руб.
Наименьшая плата — 540 руб.
Ответ: 540.

Задание 6

$(-10)^2=100$, $10^2=100$. Поэтому значение выражения равно $100-100=0$.
Ответ: 0.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{158}{11}$ приблизительно равно $14{,}364$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11+2\sqrt{165}+15-2\sqrt{165}=26$.
Ответ: 26.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+12)(x-2)=0$. Корни: -12 и 2.
Требуемый корень равен 2.
Ответ: 2.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 3 = 497$. Вероятность равна $\dfrac{497}{500} = 0{,}994$.

Ответ: $0{,}994$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

Подставляем $F = 23$: $C = \dfrac{5}{9}(23 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-9) = -5$.

Ответ: -5.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $25 + 17 \cdot 5 = 110$.
Ответ: 110.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$, поэтому каждый равен 48°.
Ответ: 48.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $34 : 2 = 17$. Вторая сторона: $17 - 5 = 12$.
Площадь равна $5 \cdot 12 = 60$.
Ответ: 60.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 5 и 12.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 53t + 196 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -2;\ 2;\ 7$.

Задание 21

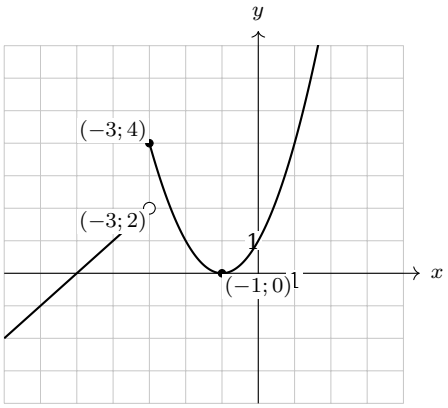
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 336 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{336}{x} - \dfrac{336}{x+3} = 2$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $1008 = 2x(x+3)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 21)(x + 24) = 0$.
Корень $x = -24$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 21 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 21 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2+0, & x\geq -3,\\ x+5, & x<-3.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;0)$, оставленная при $x\geq -3$. Точка $(-3;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+5$ при $x<-3$. Его конечная точка $(-3;2)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $2\leq m\leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(-3;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $2\leq m\leq 4$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 50 и 50. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $50+50=100$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=100\cdot 50$ и $v^2=100\cdot 50$.
Поэтому $u=50\sqrt{2}$, $v=50\sqrt{2}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=100+100\sqrt{2}$.
Ответ: $100+100\sqrt{2}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 4$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 16$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{16}{8} = 2$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - 2 = 6$.
Ответ: 6.