Решения. Вариант 80

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А2 — размеры № 3, А5 — размеры № 1, А6 — размеры № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $4 \cdot 2^4 = 64$ листов.
Ответ: 64.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 120 \cdot 400}{1000} = 2{,}99376$ кг.
После округления получаем 3 кг.
Ответ: 3.

Задание 5

Всего нужно $935 \cdot 2 = 1870$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1870}{400} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 460 = 2300$ руб.
Ответ: 2300.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10} - 2 = \dfrac{1}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $0{,}5$.
Ответ: 0,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{446}$ приблизительно равно $21{,}119$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$16 + 2 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -12$. Из равенства получаем $x - (-12) = 12$.
$x = 0$. Это значение допустимо, так как числитель $24 \neq 0$.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего шаров $30+2+8 = 40$. Благоприятных исходов 2, поэтому вероятность равна $\dfrac{2}{40} = 0{,}05$.
Ответ: $0{,}05$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 42}{5 + 23} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -40$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 8]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 4 \cdot 3^6 = 2916$.
Ответ: 2916.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 76^\circ : 2 = 38^\circ$.
Ответ: 38.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{21 + 6}{2} \cdot 6 = 81$.
Ответ: 81.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 5 клеток. Площадь равна $\dfrac{8\cdot 5}{2}=20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=9,\\ x^2+y^2=45. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=9-x$. Подставим во второе: $x^2+(9-x)^2=45$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-9x+18=0$.
Разложим на множители: $(x-3)(x-6)=0$. Следовательно, $x=3$ или $x=6$.
При $x=3$ первое уравнение даёт $y=6$; при $x=6$ получаем $y=3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 9, сумма их квадратов равна 45.
Ответ: $(x;y)=(3;6)$ или $(x;y)=(6;3)$.

Задание 21

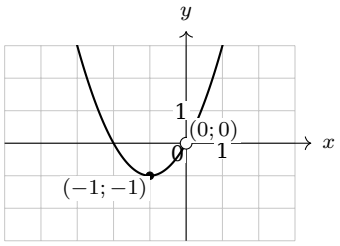
Моторная лодка прошла 81 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{81}{x+3}+\dfrac{42}{x-3}=5$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $5x^2-123x+72=0$. Его корни: $x=24$ и $x=\dfrac{3}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=24$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+2x)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2+2x = (x+1)^2-1$.
Строим параболу с вершиной $(-1;-1)$ и выколотой точкой $(0;0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 25$, $BF = 60$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{625 + 3600} = 65$.
Ответ: 65.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 18$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 9$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 18/\cos 45^\circ = 18\sqrt{2}$.
Ответ: $18\sqrt{2}$.