Решения. Вариант 81

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 195, 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 165 \cdot \dfrac{60}{100} = 99$ мм.
Ответ: 99.

Задание 3

Диаметр диска: $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины: $195 \cdot \dfrac{65}{100} = 126{,}75$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 126{,}75 = 583{,}7$ мм.
Ответ: 583,7.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$195 \cdot \dfrac{60}{100} - 205 \cdot \dfrac{55}{100} = 4{,}25$ мм.
Ответ: 4,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 195 \cdot \dfrac{60}{100} = 589{,}6$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{589{,}6 - 583{,}7}{583{,}7} \cdot 100\% \approx 1\%$.
Ответ: 1.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}9$.
$11{,}9 : 0{,}2 = 59{,}5$.
Ответ: 59,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{130}$ приблизительно равно $-11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{4 \cdot 2 - 5} = 6^3 = 216$.
Ответ: 216.

Задание 9

$5x = 1{,}5 - (-11) = 12{,}5$, поэтому $x = 2{,}5$.
Ответ: $2{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 36$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{40} = 0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.
Ответ: 30.

Задание 13

Нули множителей: -9 и -1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-9; -1]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = -4 + (25 - 1) \cdot (7) = 164$.
Ответ: 164.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 30° - 42° = 108°$.
Ответ: 108.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{16 \cdot 16}{2} = 128$.
Ответ: 128.

Задание 18

Основания равны 5 и 6, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{5+6}{2} \cdot 4 = 22$.

Ответ: 22.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{x-3} \leq 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 3$. Разложим числитель: $x^2-16 = (x-4)(x+4)$.
Критические точки: -4, 3, 4. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -4 и 4 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-4] \cup (3;4]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $9{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 36 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+36$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+36)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+36} = \dfrac{5}{48}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+36) = \dfrac{48}{5}(2x+36)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 12$ и $x = -\dfrac{144}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

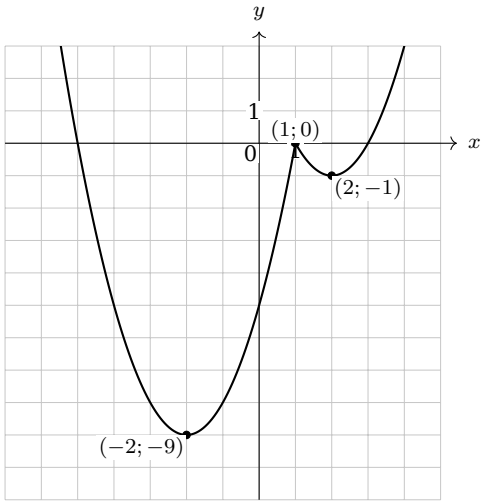
Проверка: $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{48} = \dfrac{5}{48}$, поэтому время совместной работы равно $9{,}6$ ч.

Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 1 - 4|x - 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 6t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-3; -9)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -9$ пересечений нет; при $m = -9$ одно; при $-9 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 3$, $CK = 19$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 3$. Сторона $BC = BK + CK = 22$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(3 + 22) = 50$.
Ответ: 50.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 125$. Поэтому $R = \dfrac{25}{2}$.

Ответ: $\dfrac{25}{2}$.