Решения. Вариант 83

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; коридор — 2; кладовая — 3; кухня — 7.
Ответ: 4237.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}4^2 = 20$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ м^2. Требуется $20 : 0{,}04 = 500$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{500}{12} \right\rceil = 42$ целых упаковок.
Ответ: 42.

Задание 3

На плане помещение занимает 156 клеток.
Его площадь $156 \cdot 0{,}4^2 = 24{,}96$ м^2.
Ответ: 24,96.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-30}{30} \cdot 100\% = 230\%$.
Ответ: 230.

Задание 5

Тариф «А»: $430 + 12 \cdot 60 = 1150$ руб.
Тариф «Б»: $580 + 2 \cdot 30 = 640$ руб.
Безлимитный тариф стоит 870 руб. Наименьшая плата — 640 руб.
Ответ: 640.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{4} - \dfrac{6}{5} = \dfrac{61}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $6{,}1$.
Ответ: 6,1.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{70}$ приблизительно равно $8{,}367$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$13 + 3 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 4$. Из равенства получаем $x-(4)=-\frac{7}{4}$.
$x = 2{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $-7 \neq 0$.
Ответ: $2{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $30+6+4=40$. Благоприятных исходов 6, поэтому вероятность равна $\frac{6}{40}=0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2-1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y=2x+2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F=5$: $C=\frac{5}{9}(5-32)=\frac{5}{9}\cdot(-27)=-15$.
Ответ: -15.

Задание 13

$144=12^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 12.
Множество решений: $(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_6=5\cdot3^5=1215$.
Ответ: 1215.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=16^2+12^2=400$. Длина положительна, поэтому $BC=20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB=24:2=12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH=\sqrt{13^2-12^2}=5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52:2=26$. Вторая сторона: $26-10=16$.
Площадь равна $10\cdot16=160$.
Ответ: 160.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 3, поэтому площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{40}{x-75} + \dfrac{40}{x+75} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 75$ и $x \neq -75$.
Умножим уравнение на $(x-75)(x+75)$: $40(x+75) + 40(x-75) = x^2 - 5625$.
Получим $x^2 - 80x - 5625 = 0$, или $(x-40)^2 = 7225 = 85^2$.
Поэтому $x = 40 - 85 = -45$ или $x = 40 + 85 = 125$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-45;\ 125$.

Задание 21

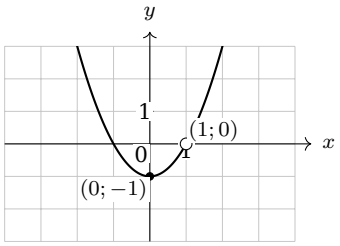
Имеются два сплава с содержанием меди 30% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80 - x$ кг, причём $0 < x < 80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{30}{100}x + \dfrac{75}{100}(80 - x) = \dfrac{45}{100} \cdot 80$.
Умножим на 100: $30x + 6000 - 75x = 3600$. Поэтому $45x = 2400$ и $x = \dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(0; -1)$ и выколотой точкой $(1; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 85, а основание равно 80. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{85^2 - 40^2} = 75$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 80 \cdot 75 = 3000$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{85 \cdot 85 \cdot 80}{4 \cdot 3000} = \dfrac{289}{6}$.
Ответ: $\dfrac{289}{6}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 75$, $CD = 85$, основание $BC = 22{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 85 - \dfrac{45}{2} = \dfrac{125}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 75$, $AP = BC = \dfrac{45}{2}$, $PD = AD - BC = 40$.

В треугольнике CPD выполняется $75^2 + 40^2 = 85^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 75.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{125}{2} + \dfrac{45}{2}}{2} \cdot 75 = \dfrac{6375}{2}$.

Ответ: $\dfrac{6375}{2}$.