Решения. Вариант 84

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Иваново — 2; Васильково — 4; Камышино — 3.
Ответ: 243.

Задание 2

Путь занимает 11 клеток.
Длина пути равна $11 \cdot 1 = 11$ км.
Ответ: 11.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 5 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{25} \cdot 60 + \frac{13}{15} \cdot 60 = 78{,}4$.
Ответ: 78,4.

Задание 5

Васильково: $2 \cdot 61 + 1{,}5 \cdot 685 + 3 \cdot 871 = 3762{,}5$ руб.
Иваново: $2 \cdot 68 + 1{,}5 \cdot 655 + 3 \cdot 856 = 3686{,}5$ руб.
Камышино: $2 \cdot 58 + 1{,}5 \cdot 640 + 3 \cdot 880 = 3716$ руб.
Журавушка: $2 \cdot 53 + 1{,}5 \cdot 664 + 3 \cdot 901 = 3805$ руб.
Наименьшая стоимость — 3686,5 руб.
Ответ: 3686,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна 8,3.
$8{,}3 : 0{,}8 = 10{,}375$.
Ответ: 10,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{252}$ приблизительно равно $-15{,}875$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$8x = -5 - (-5) = 0$, поэтому $x = 0$.
Ответ: 0.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 18$; их 2. Вероятность равна $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -x$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 135}{5 + 22} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $-5x > -45$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 9)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{10} = 20 + (10-1) \cdot (5) = 65$.
Ответ: 65.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 68° - 48° = 64°$.
Ответ: 64.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 110° : 2 = 55°$.
Ответ: 55.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{24 + 4}{2} \cdot 10 = 140$.
Ответ: 140.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 4 и 3. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 73t + 576 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -3;\ 3;\ 8$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 864 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{864}{x} - \dfrac{864}{x+4} = 3$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $3456 = 3x(x+4)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 32)(x + 36) = 0$.
Корень $x = -36$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 32 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 32 км/ч.

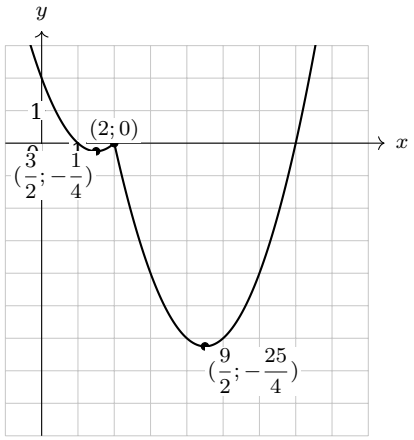
Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 8 - 3|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{1}{4}$ два; при $m = -\frac{1}{4}$ три.

При $-\frac{1}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{1}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 36 и 25. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $36 + 25 = 61$. Обозначим катеты u и v.

Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 61 \cdot 36$ и $v^2 = 61 \cdot 25$.

Поэтому $u = 6\sqrt{61}$, $v = 5\sqrt{61}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 61 + 11\sqrt{61}$.

Ответ: $61 + 11\sqrt{61}$.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 9$, $MD = 5$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{9} = \dfrac{25}{9}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 9 - \dfrac{25}{9} = \dfrac{56}{9}$.
Ответ: $\dfrac{56}{9}$.