Решения. Вариант 85

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 2; Луговое — 3; Сосновка — 4.
Ответ: 234.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $12 + 15 + 36 = 63$ км.
Ответ: 63.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 27 и 36 км.
Её длина $\sqrt{27^2 + 36^2} = 45$ км.
Ответ: 45.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 12 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 39 км.
Время: $\dfrac{12}{60} \cdot 60 + \dfrac{39}{30} \cdot 60 = 90$ мин.
Ответ: 90.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{63 \cdot 8{,}5}{100} \cdot 75 = 401{,}625$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{45 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 75 = 354{,}375$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{12 \cdot 8{,}5 + 39 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 75 = 383{,}625$ руб.

Наименьшая стоимость — $354{,}375$ руб.
Ответ: 354,375.

Задание 6

$(-12)^2 = 144$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $144 - 49 = 95$.
Ответ: 95.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{56}{11}$ приблизительно равно $5{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{45} + 3 - 2\sqrt{45} = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x - 1) = 0$. Корни: -9 и 1.
Требуемый корень равен 1.
Ответ: 1.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 24 = 476$. Вероятность равна $\dfrac{476}{500} = 0{,}952$.

Ответ: $0{,}952$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.

Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -6 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-6; 1)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 8-го ряда число мест увеличивается 7 раз: $25 + 7 \cdot 4 = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{22 \cdot 10}{2} = 110$.

Ответ: 110.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-2, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-2-x$. Подставим во второе: $x^2+(-2-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+2x-3=0$.
Разложим на множители: $(x+3)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-3$ или $x=1$.
При $x=-3$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -2, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(-3;1)$ или $(x;y)=(1;-3)$.

Задание 21

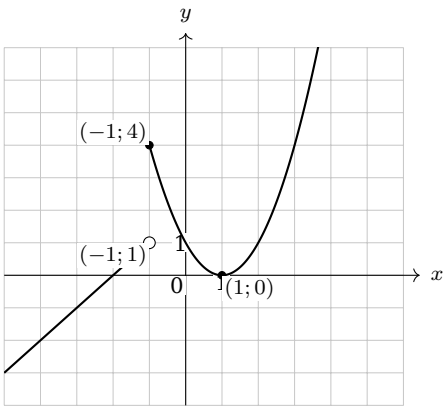
Моторная лодка прошла 64 км по течению реки и 24 км против течения, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{64}{x+4}+\dfrac{24}{x-4}=7$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $7x^2-88x+48=0$. Его корни: $x=12$ и $x=\dfrac{4}{7}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=12$ времена равны 4 ч и 3 ч, их сумма 7 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2+0, & x\geq -1,\\ x+2, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;0)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+2$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;1)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $1\leq m\leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(-1;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $1\leq m\leq 4$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=40$, $BF=75$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{1600+5625}=85$.
Ответ: 85.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 19$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{19}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 19/\cos 60^\circ = 38$.

Ответ: 38.