Решения. Вариант 86

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

$V = 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}1 = 21$ м^3.
Ответ: 21.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $40 : 2 = 20$ см и 48 см.
$R = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52$ см.
Ответ: 52.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $34000 \cdot \dfrac{85}{100} = 28900$ руб.
Ответ: 28900.

Задание 5

Объём парной равен 21 м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $34000 + 1200 = 35200$ руб.
Печь № 3: $28000 + 1200 + 6000 = 35200$ руб.
Наименьшая сумма — 35200 руб.
Ответ: 35200.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{6}{5} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем 2.
Ответ: 2.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{153}$ приблизительно равно $12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$16 + 3 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\dfrac{27}{8}$.
$x = -8{,}375$. Это значение допустимо, так как числитель $-27 \neq 0$.
Ответ: $-8{,}375$.

Задание 10

Всего шаров $3 + 16 + 31 = 50$. Благоприятных исходов 16, поэтому вероятность равна $\dfrac{16}{50} = 0{,}32$.
Ответ: $0{,}32$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 27}{3^2} = 6$ кг.
Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 1$, второе — $x \le 6$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(1; 6]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 52 : 2 = 26$.
Ответ: 26.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 8 \cdot 13 = 104$.
Ответ: 104.

Задание 18

Основания равны 2 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{2 + 5}{2} \cdot 5 = 17{,}5$.
Ответ: $17{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-25=(x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 3, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(3;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $8{,}4$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 7 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+7$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+7)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{5}{42}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+7)=\dfrac{42}{5}(2x+7)$.

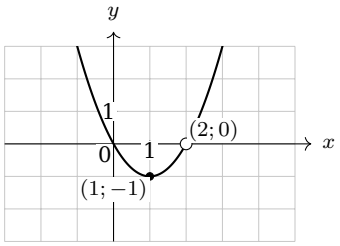
Корни этого квадратного уравнения: $x=14$ и $x=-\dfrac{21}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

Проверка: $\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{21}=\dfrac{5}{42}$, поэтому время совместной работы равно $8{,}4$ ч.
Ответ: 14 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-2x)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(1;-1)$ и выколотой точкой $(2;0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 4$, $CK = 20$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 4$. Сторона $BC = BK + CK = 24$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(4 + 24) = 56$.
Ответ: 56.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 117$. Поэтому $R = \dfrac{39}{4}$.

Ответ: $\dfrac{39}{4}$.