Решения. Вариант 87

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 6.
Ответ: 6.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 7, 9, 10, 12.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{16+18+12+20}{4} = 16{,}5$ ГБ.
Ответ: $16{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 2 ГБ.
Плата: $550 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 65 = 680$ руб.
Ответ: 680.

Задание 5

За месяц № 2 использовано 600 минут и 16 ГБ.
«Основной»: $550 + 250 \cdot 2 + 6 \cdot 65 = 1440$ руб.
«Расширенный»: $800 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 1000$ руб.
Наименьшая плата — 1000 руб.
Ответ: 1000.

Задание 6

Сумма в скобках равна $10{,}1$.
$10{,}1 : 0{,}8 = 12{,}625$.
Ответ: $12{,}625$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{376}$ приблизительно равно $-19{,}391$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3\cdot 2-3} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$4x = 2 - (22) = -20$, поэтому $x = -5$.
Ответ: -5.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 18$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{20} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -x$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 113$: $C = \dfrac{5}{9}(113 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (81) = 45$.
Ответ: 45.

Задание 13

$144 = 12^2$. Требуются числа, модуль которых больше 12.
Множество решений: $(-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{12} = -19 + (12 - 1) \cdot (-7) = -96$.
Ответ: -96.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 56° - 46° = 78°$.
Ответ: 78.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 72 : 2 = 36$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $26 : 2 = 13$. Вторая сторона: $13 - 8 = 5$.
Площадь равна $8 \cdot 5 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 6 \cdot 3 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 36x - 72 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 36(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-36) = (x+2)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -2;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -2;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 13 км/ч, второго 15 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $108{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

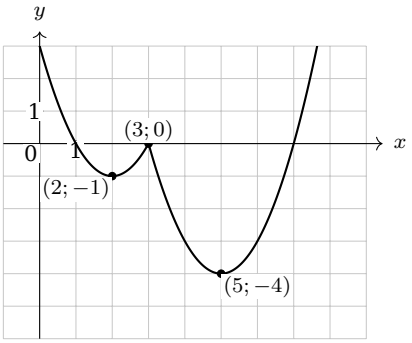
Сумма путей: $13(t - \frac{1}{4}) + 15t = \frac{435}{4}$. Отсюда $28t = 112$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $15 \cdot 4 = 60$ км. Время движения первого $\frac{15}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 60 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 7x + 12 - 3|x - 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 4t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -1)$ и $(2; -4)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 3$, $AC = 6$, $NC = 21$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 21$. По подобию $\dfrac{x}{x + 21} = \dfrac{3}{6}$.
Отсюда $6x = 3(x + 21)$, то есть $3x = 63$. Получаем $BN = 21$.
Ответ: 21.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 30$, $BC = 36$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{108}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 30 - \dfrac{108}{5} = \dfrac{42}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 36 \cdot \dfrac{\frac{42}{5}}{30} = \dfrac{252}{25}$.

Ответ: $\dfrac{252}{25}$.