Решения. Вариант 89

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 175 \cdot \dfrac{60}{100} = 105$ мм.
Ответ: 105.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $205 \cdot \dfrac{65}{100} = 133{,}25$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 133{,}25 = 622{,}1$ мм.
Ответ: 622,1.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$205 \cdot \dfrac{60}{100} - 215 \cdot \dfrac{55}{100} = 4{,}75$ мм.
Ответ: 4,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 205 \cdot \dfrac{60}{100} = 627$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{627 - 622{,}1}{622{,}1} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$.
Ответ: 0,8.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{13}{5} = -\dfrac{27}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $-2{,}7$.
Ответ: $-2{,}7$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{277}$ приблизительно равно $16{,}643$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$12 + 2 = 14$.
Ответ: 14.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = 11$.
$x = 21$. Это значение допустимо, так как числитель $22 \neq 0$.
Ответ: 21.

Задание 10

Всего шаров $33+2+5 = 40$. Благоприятных исходов 2, поэтому вероятность равна $\frac{2}{40} = 0{,}05$.
Ответ: $0{,}05$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{3}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = x - 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{10{,}8 \cdot 18}{18 - 10{,}8} = 27$ Ом.
Ответ: 27.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 7. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-4; 7]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 2^3 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$. Длина положительна, поэтому $BC = 20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60$.

Ответ: 60.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 5 и 12. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 97x^2 + 1296 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 97t + 1296 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 81) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 81$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 81$ — $x = \pm 9$.

Ответ: $-9;\ -4;\ 4;\ 9$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 120 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

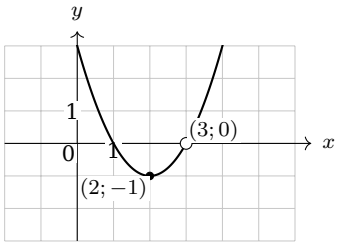
Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{x+2} = 3$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $240 = 3x(x+2)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 8)(x + 10) = 0$.
Корень $x = -10$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 8 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.

Ответ: 8 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-4x+3)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(2; -1)$ и выколотой точкой $(3; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 8 и 72. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $8 + 72 = 80$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 80 \cdot 8$ и $v^2 = 80 \cdot 72$.
Поэтому $u = 8\sqrt{10}$, $v = 24\sqrt{10}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 80 + 32\sqrt{10}$.
Ответ: $80 + 32\sqrt{10}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 10$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{36}{10} = \dfrac{18}{5}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 10 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{32}{5}$.
Ответ: $\dfrac{32}{5}$.