Решения. Вариант 90

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

яблони — 5; баня — 6; жилой дом — 3; теплица — 1.
Ответ: 5631.

Задание 2

Дорожки занимают $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой получается $26+64=90$ м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 90 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{90}{8} \right\rceil = 12$.
Ответ: 12.

Задание 3

Баня занимает $2 \cdot 4 = 8$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $8 \cdot 4 = 32$ м^2.
Ответ: 32.

Задание 4

Вертикальные проекции построек перекрываются; горизонтальный промежуток составляет 9 клеток.
Расстояние равно $9 \cdot 2 = 18$ м.
Ответ: 18.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(24000 + 34800) - (18000 + 12000) = 28800$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 10 = 15$ руб.; электричество: $10 \cdot 4{,}5 = 45$ руб.
Экономия за час равна 30 руб. Срок: $28800 : 30 = 960$ ч.
Ответ: 960.

Задание 6

Сумма в скобках равна 12.
$12 : 0{,}4 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{44}$ приблизительно равно $-6{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4\cdot 2-6} = 3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$5x = 87 - (7) = 80$, поэтому $x = 16$.
Ответ: 16.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 96$; их 12. Вероятность равна $\dfrac{12}{100} = 0{,}12$.

Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 31{,}5}{3^2} = 7$ кг.

Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -3$, второе — $x \le 3$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-3; 3]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_8 = -26 + (8-1) \cdot (5) = 9$.
Ответ: 9.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 57° - 39° = 84°$.
Ответ: 84.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 24 \cdot 6 = 144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основание занимает 5 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=0-x$. Подставим во второе: $x^2+(0-x)^2=8$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-4=0$.
Разложим на множители: $(x+2)(x-2)=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=2$.
При $x=-2$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=-2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 0, сумма их квадратов равна 8.
Ответ: $(x;y)=(-2;2)$ или $(x;y)=(2;-2)$.

Задание 21

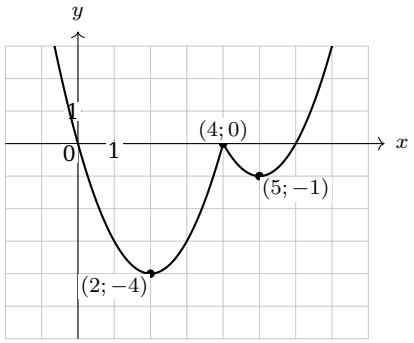
Моторная лодка прошла 76 км по течению реки и 9 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{76}{x+5}+\dfrac{9}{x-5}=5$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $5x^2-85x+210=0$. Его корни: $x=14$ и $x=3$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=14$ времена равны 4 ч и 1 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 7x + 12 - 3|x - 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -4)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 18$, $BF = 24$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{324 + 576} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 20$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 10$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 20/\cos 30^\circ = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.