Решения. Вариант 91

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; кладовая — 3; коридор — 2; санузел — 1.
Ответ: 4321.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ м^2. Требуется $31{,}25 : 0{,}125 = 250$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{250}{16} \right\rceil = 16$ целых упаковок.
Ответ: 16.

Задание 3

На плане помещение занимает 44 клеток.
Его площадь $44 \cdot 0{,}5^2 = 11$ м^2.
Ответ: 11.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $440 + 18 \cdot 50 = 1340$ руб.
Тариф «Б»: $590 + 8 \cdot 35 = 870$ руб.
Безлимитный тариф стоит 885 руб. Наименьшая плата — 870 руб.
Ответ: 870.

Задание 6

$(-11)^2 = 121$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $121 - 49 = 72$.
Ответ: 72.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{223}{17}$ приблизительно равно $13{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{143} + 11 - 2\sqrt{143} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 10)(x - 9) = 0$. Корни: -10 и 9.
Требуемый корень равен 9.
Ответ: 9.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 19 = 481$. Вероятность равна $\dfrac{481}{500} = 0{,}962$.

Ответ: $0{,}962$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \dfrac{5}{9}(14 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.

Ответ: -10.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $18 + 11 \cdot 3 = 51$.
Ответ: 51.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$, поэтому каждый равен 27°.
Ответ: 27.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $56 : 2 = 28$. Вторая сторона: $28 - 14 = 14$.
Площадь равна $14 \cdot 14 = 196$.
Ответ: 196.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-36=(x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 3, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-6]\cup(3;6]$.

Задание 21

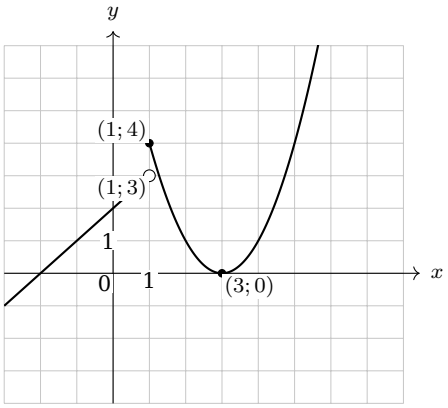
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 14 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 21 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+21$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+21)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+21}=\dfrac{1}{14}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+21)=14(2x+21)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=21$ и $x=-14$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{14}$, поэтому время совместной работы равно 14 ч.
Ответ: 21 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x-3)^2 + 0, & x \geq 1, \\ x + 2, & x < 1. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3;0)$, оставленная при $x \geq 1$. Точка $(1;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < 1$. Его конечная точка $(1;3)$ выколота.
При $m < 0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = 0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0 < m < 3$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $3 \leq m \leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m > 4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(1;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = 0$ или $3 \leq m \leq 4$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 21$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 26$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 26) = 62$.
Ответ: 62.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 7$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-7)^2 + 8^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 113$. Поэтому $R = \dfrac{113}{14}$.

Ответ: $\dfrac{113}{14}$.