Решения. Вариант 93

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Сосновка — 4; Берёзовка — 2; Луговое — 1.
Ответ: 421.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $24 + 21 + 28 = 73$ км.
Ответ: 73.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 21 и 28 км.
Её длина $\sqrt{21^2 + 28^2} = 35$ км.
Ответ: 35.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 24 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 35 км.
Время: $\dfrac{24}{100} \cdot 60 + \dfrac{35}{40} \cdot 60 = 66{,}9$ мин.
Ответ: 66,9.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{73 \cdot 9}{100} \cdot 77 = 505{,}89$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{53 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 77 = 469{,}315$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{24 \cdot 9 + 35 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 77 = 476{,}245$ руб.
Наименьшая стоимость — $469{,}315$ руб.
Ответ: 469,315.

Задание 6

Сумма в скобках равна 10.
$10 : 0{,}4 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{118}$ приблизительно равно $-10{,}863$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4 \cdot 2 - 5} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$8x = -31 - (-15) = -16$, поэтому $x = -2$.
Ответ: -2.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 48$; их 6. Вероятность равна $\frac{6}{50} = 0{,}12$.

Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -3x$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \frac{13{,}2 \cdot 22}{22 - 13{,}2} = 33$ Ом.

Ответ: 33.

Задание 13

Нули множителей: -1 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-1; 4)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_7 = 20 + (7-1) \cdot (-3) = 2$.
Ответ: 2.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 29° - 49° = 102°$.
Ответ: 102.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45$.
Ответ: 45.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$.

Ответ: 96.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 7 и 4, поэтому площадь равна $7 \cdot 4 = 28$.
Ответ: 28.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{30}{x-72}+\dfrac{30}{x+72}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 72$ и $x\neq -72$.
Умножим уравнение на $(x-72)(x+72)$: $30(x+72)+30(x-72)=x^2-5184$.
Получим $x^2-60x-5184=0$, или $(x-30)^2=6084=78^2$.
Поэтому $x=30-78=-48$ или $x=30+78=108$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-48;\ 108$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90-x$ кг, причём $0<x<90$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x+\dfrac{70}{100}(90-x)=\dfrac{35}{100}\cdot 90$.
Умножим на 100: $15x+6300-70x=3150$. Поэтому $55x=3150$ и $x=\dfrac{630}{11}$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{630}{11}$ кг.

Задание 22

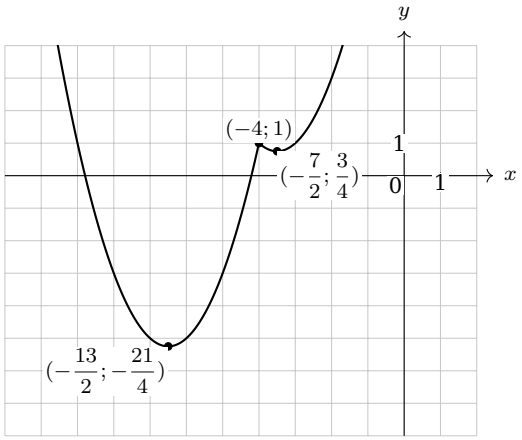
Постройте график функции $y = x^2 + 10x + 25 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t + 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{21}{4})$ и $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.

При $m < -\frac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{21}{4}$ одно; при $-\frac{21}{4} < m < \frac{3}{4}$ два; при $m = \frac{3}{4}$ три.

При $\frac{3}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = \frac{3}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 78, а основание равно 60. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{78^2 - 30^2} = 72$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 72 = 2160$.

По формуле $R = \frac{abc}{4S}$ получаем $R = \frac{78 \cdot 78 \cdot 60}{4 \cdot 2160} = \frac{169}{4}$.

Ответ: $\frac{169}{4}$.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 48$, $CD = 102$, основание $BC = 6$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 102 - 6 = 96$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 48$, $AP = BC = 6$, $PD = AD - BC = 90$.
В треугольнике CPD выполняется $48^2 + 90^2 = 102^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 48.
Площадь $S = \dfrac{96 + 6}{2} \cdot 48 = 2448$.
Ответ: 2448.