Решения. Вариант 95

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 3.
Ответ: 3.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 8, 9, 11.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{22+4+8+6}{4}=10$ ГБ.
Ответ: 10.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 100 минут и 2 ГБ.
Плата: $560+100\cdot 2+2\cdot 70=900$ руб.
Ответ: 900.

Задание 5

За месяц № 10 использовано 300 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $560+0\cdot 2+0\cdot 70=560$ руб.
«Расширенный»: $815+0\cdot 2+0\cdot 50=815$ руб.
Наименьшая плата — 560 руб.
Ответ: 560.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}=1$.
Умножаем на 5 и получаем 5.
Ответ: 5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{51}$ приблизительно равно $7{,}141$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$20+3=23$.
Ответ: 23.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = -\dfrac{13}{4}$.
$x = 6{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-13 \neq 0$.
Ответ: $6{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $27 + 3 + 10 = 40$. Благоприятных исходов 3, поэтому вероятность равна $\dfrac{3}{40} = 0{,}075$.
Ответ: $0{,}075$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 167$: $C = \dfrac{5}{9}(167 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (135) = 75$.
Ответ: 75.

Задание 13

$4 = 2^2$. Требуются числа, модуль которых больше 2.
Множество решений: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 7 \cdot 3^4 = 567$.
Ответ: 567.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $18 : 2 = 9$. Вторая сторона: $9 - 4 = 5$.
Площадь равна $4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 5 клеток. Площадь равна $\dfrac{8\cdot 5}{2}=20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=2,\\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=2-x$. Подставим во второе: $x^2+(2-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-2x-3=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-3)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=3$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=3$; при $x=3$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 2, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(-1;3)$ или $(x;y)=(3;-1)$.

Задание 21

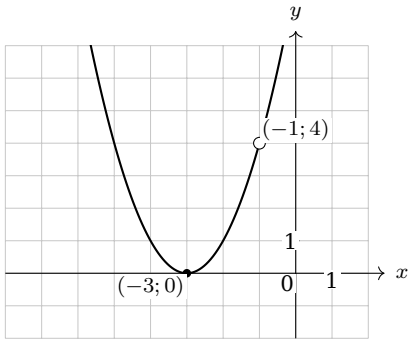
Моторная лодка прошла 72 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{72}{x+2}+\dfrac{28}{x-2}=6$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $6x^2-100x+64=0$. Его корни: $x=16$ и $x=\dfrac{2}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=16$ времена равны 4 ч и 2 ч, их сумма 6 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+6x+9)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.
Строим параболу с вершиной $(-3;0)$ и выколотой точкой $(-1;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -5 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 30$, $BF = 72$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{900 + 5184} = 78$.
Ответ: 78.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 21$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{21}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 21/\cos 45^\circ = 21\sqrt{2}$.

Ответ: $21\sqrt{2}$.