Решения. Вариант 96

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 3, А6 — размеры № 2, А4 — размеры № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $4 \cdot 2^4 = 64$ листов.
Ответ: 64.

Задание 3

Размеры листа равны $10{,}5$ см и $14{,}8$ см.
Площадь $10{,}5 \cdot 14{,}8 = 155{,}4$ см^2.
Ответ: 155,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 80 \cdot 500}{1000} = 2{,}4948$ кг.
После округления получаем $2{,}5$ кг.
Ответ: 2,5.

Задание 5

Всего нужно $1005 \cdot 4 = 4020$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{4020}{500} \right\rceil = 9$.
Стоимость: $9 \cdot 500 = 4500$ руб.
Ответ: 4500.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}3$.
$4{,}3 : 0{,}8 = 5{,}375$.
Ответ: 5,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{221}$ приблизительно равно $-14{,}866$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4\cdot 2-7} = 3^1 = 3$.
Ответ: 3.

Задание 9

$8x = 9 - (17) = -8$, поэтому $x = -1$.
Ответ: -1.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 130}{4 + 22} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $-5x \geq 20$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -4]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_8 = -8 + (8-1) \cdot (-4) = -36$.
Ответ: -36.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 35° - 61° = 84°$.
Ответ: 84.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 84° : 2 = 42°$.
Ответ: 42.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 10}{2} \cdot 3 = 40{,}5$.
Ответ: $40{,}5$.

Задание 18

Основания равны 4 и 9, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{4+9}{2} \cdot 4 = 26$.

Ответ: 26.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-49=(x-7)(x+7)$.
Критические точки: -7, 3, 7. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -7 и 7 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-7]\cup(3;7]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $11{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 42 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

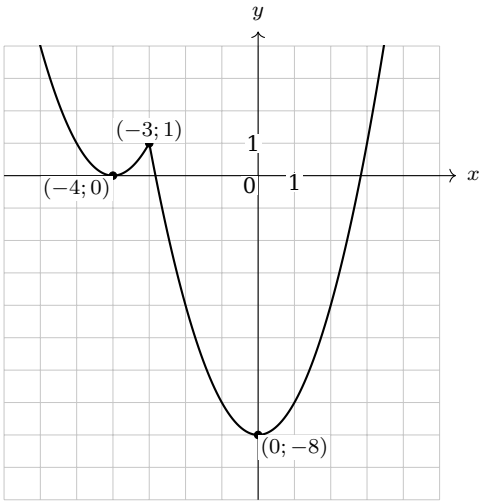
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+42$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+42)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+42}=\dfrac{5}{56}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+42)=\dfrac{56}{5}(2x+42)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x=14$ и $x=-\dfrac{168}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{56}=\dfrac{5}{56}$, поэтому время совместной работы равно $11{,}2$ ч.
Ответ: 14 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 4 - 4|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 6t + 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; 0)$ и $(3; -8)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.
При $m < -8$ пересечений нет; при $m = -8$ одно; при $-8 < m < 0$ два; при $m = 0$ три.
При $0 < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = 0$ или $m = 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$, $CK = 22$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 6$. Сторона $BC = BK + CK = 28$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(6 + 28) = 68$.
Ответ: 68.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 164$. Поэтому $R = \dfrac{41}{4}$.

Ответ: $\dfrac{41}{4}$.