Решения. Вариант 97

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 215, 225, 235 мм. Наименьшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 185 \cdot \dfrac{65}{100} = 120{,}25$ мм.
Ответ: 120,25.

Задание 3

Диаметр диска: $15 \cdot 25{,}4 = 381$ мм.
Высота боковины: $215 \cdot \dfrac{65}{100} = 139{,}75$ мм.
$D = 381 + 2 \cdot 139{,}75 = 660{,}5$ мм.
Ответ: 660,5.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$215 \cdot \dfrac{60}{100} - 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 5{,}25$ мм.
Ответ: 5,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $16 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 215 \cdot \dfrac{60}{100} = 664{,}4$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{664{,}4 - 660{,}5}{660{,}5} \cdot 100\% \approx 0{,}6\%$.
Ответ: 0,6.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $10^2 = 100$. Поэтому значение выражения равно $25 - 100 = -75$.
Ответ: -75.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{363}{17}$ приблизительно равно $21{,}353$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $14 + 2\sqrt{182} + 13 - 2\sqrt{182} = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-3)(x-7)=0$. Корни: 3 и 7.
Требуемый корень равен 7.
Ответ: 7.

Задание 10

Исправных ламп $200-6=194$. Вероятность равна $\dfrac{194}{200}=0{,}97$.
Ответ: $0{,}97$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{14{,}4\cdot 24}{24-14{,}4}=36$ Ом.
Ответ: 36.

Задание 13

Нули множителей: -9 и -3. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-9;-3]$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 23-го ряда число мест увеличивается 22 раз: $23+22\cdot 3=89$.
Ответ: 89.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-64^\circ=116^\circ$, поэтому каждый равен 58°.
Ответ: 58.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{39^2-15^2}=36$.
Ответ: 36.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{24\cdot 12}{2}=144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 3 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 64x - 256 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 64(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-64) = (x+4)(x-8)(x+8) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -4;\ 8$.
Ответ: $-8;\ -4;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 14 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $104{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

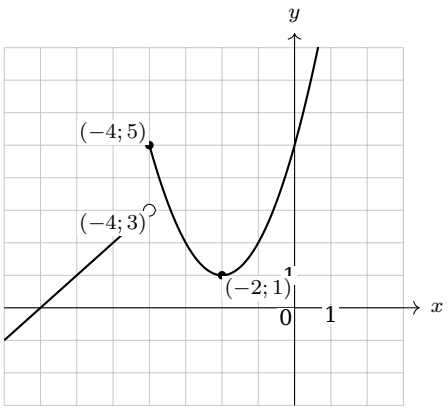
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 14t = \dfrac{419}{4}$. Отсюда $29t = 116$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $14 \cdot 4 = 56$ км. Время движения первого $\dfrac{13}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 56 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+2)^2+1, & x\geq -4,\\ x+7, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2;1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;5)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+7$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;3)$ выколота.
При $m<1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1<m<3$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $3\leq m\leq 5$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>5$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 5 включена, поскольку точка $(-4;5)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=1$ или $3\leq m\leq 5$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=5$, $AC=20$, $NC=23$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+23$. По подобию $\dfrac{x}{x+23}=\dfrac{5}{20}$.

Отсюда $20x=5(x+23)$, то есть $15x=115$. Получаем $BN=\dfrac{23}{3}$.

Ответ: $\dfrac{23}{3}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 102$, $BC = 96$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{768}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 102 - \dfrac{768}{17} = \dfrac{966}{17}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 96 \cdot \dfrac{\frac{966}{17}}{102} = \dfrac{15456}{289}$.

Ответ: $\dfrac{15456}{289}$.