Решения. Вариант 98

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

жилой дом — 3; сарай — 4; теплица — 1; яблони — 5.
Ответ: 3415.

Задание 2

Дорожки занимают $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой получается $26+64=90$ м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 90 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{90}{12} \right\rceil = 8$.
Ответ: 8.

Задание 3

Дом занимает 17 клеток, баня — 8 клеток. Разность равна 9 клеткам.
Одна клетка соответствует $2^2=4$ м^2. Площадь равна $9\cdot 4=36$ м^2.
Ответ: 36.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Расстояние $\sqrt{(4\cdot 2)^2+(3\cdot 2)^2}=10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(25500+40360)-(20000+10500)=35360$ руб.
Газ за час: $1{,}2\cdot 5=6$ руб.; электричество: $8\cdot 5=40$ руб.
Экономия за час равна 34 руб. Срок: $35360:34=1040$ ч.
Ответ: 1040.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{11}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $4{,}5$.
Ответ: 4,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{141}$ приблизительно равно $11{,}874$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$23+1=24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -1$. Из равенства получаем $x - (-1) = \dfrac{15}{2}$.
$x = 6{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $30 \neq 0$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $25 + 10 + 5 = 40$. Благоприятных исходов 10, поэтому вероятность равна $\dfrac{10}{40} = 0{,}25$.
Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 216}{6^2} = 12$ кг.
Ответ: 12.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -12$, второе — $x \leq 0$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-12; 0]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 2 \cdot 2^5 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 14 \cdot 3 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 2, поэтому площадь равна $6 \cdot 2 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{48}{x-90} + \dfrac{48}{x+90} = 1$.

Область допустимых значений: $x \neq 90$ и $x \neq -90$.
Умножим уравнение на $(x-90)(x+90)$: $48(x+90) + 48(x-90) = x^2 - 8100$.
Получим $x^2 - 96x - 8100 = 0$, или $(x-48)^2 = 10404 = 102^2$.
Поэтому $x = 48 - 102 = -54$ или $x = 48 + 102 = 150$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-54;\ 150$.

Задание 21

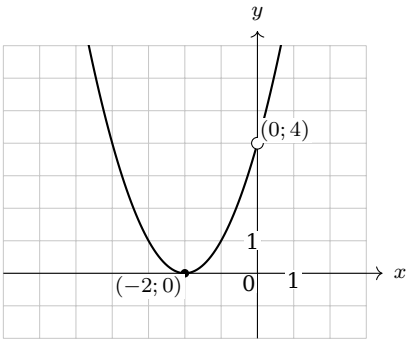
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90 - x$ кг, причём $0 < x < 90$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x + \dfrac{75}{100}(90 - x) = \dfrac{40}{100} \cdot 90$.
Умножим на 100: $20x + 6750 - 75x = 3600$. Поэтому $55x = 3150$ и $x = \dfrac{630}{11}$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{630}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+4x+4)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2+4x+4 = (x+2)^2$. Строим параболу с вершиной $(-2;0)$ и выколотой точкой $(0;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 102, а основание равно 96. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{102^2 - 48^2} = 90$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 96 \cdot 90 = 4320$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{102 \cdot 102 \cdot 96}{4 \cdot 4320} = \dfrac{289}{5}$.
Ответ: $\dfrac{289}{5}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 90$, $CD = 102$, основание $BC = 27$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 102 - 27 = 75$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 90$, $AP = BC = 27$, $PD = AD - BC = 48$.
В треугольнике CPD выполняется $90^2 + 48^2 = 102^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 90.
Площадь $S = \dfrac{75 + 27}{2} \cdot 90 = 4590$.
Ответ: 4590.