Решения. Вариант 99

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; гостиная — 6; кладовая — 3; коридор — 2.
Ответ: 4632.

Задание 2

Пол спальни занимает 99 клеток, его площадь $99 \cdot 0{,}4^2 = 15{,}84$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м^2. Требуется $15{,}84 : 0{,}08 = 198$ плиток.
Нужно $\left\lceil \frac{198}{6} \right\rceil = 33$ целых упаковок.
Ответ: 33.

Задание 3

На плане помещение занимает 20 клеток.
Его площадь $20 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}2$ м^2.
Ответ: 3,2.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\frac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $450 + 25 \cdot 55 = 1825$ руб.
Тариф «Б»: $600 + 15 \cdot 30 = 1050$ руб.
Безлимитный тариф стоит 900 руб. Наименьшая плата — 900 руб.
Ответ: 900.

Задание 6

Сумма в скобках равна 7,5.
$7{,}5 : 0{,}5 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{356}$ приблизительно равно $-18{,}868$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3 \cdot 2 - 3} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$5x = -40{,}5 - (12) = -52{,}5$, поэтому $x = -10{,}5$.
Ответ: $-10{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 48$; их 8. Вероятность равна $\dfrac{8}{50} = 0{,}16$.

Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -2x$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 131$: $C = \dfrac{5}{9}(131 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (99) = 55$.

Ответ: 55.

Задание 13

$4 = 2^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 2.
Множество решений: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_7 = 16 + (7-1) \cdot (1) = 22$.
Ответ: 22.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 30° - 36° = 114°$.
Ответ: 114.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $46 : 2 = 23$. Вторая сторона: $23 - 10 = 13$.
Площадь равна $10 \cdot 13 = 130$.
Ответ: 130.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 8 и 6.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 68x^2 + 256 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 68t + 256 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -2;\ 2;\ 8$.

Задание 21

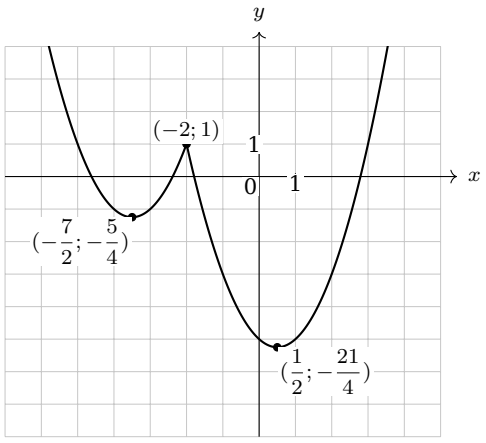
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 504 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{504}{x} - \dfrac{504}{x+4} = 3$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $2016 = 3x(x+4)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 24)(x + 28) = 0$.
Корень $x = -28$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 24 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 3x + 3 - 4|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{4})$ и $(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{21}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.
При $m < -\dfrac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\dfrac{21}{4}$ одно; при $-\dfrac{21}{4} < m < -\dfrac{5}{4}$ два; при $m = -\dfrac{5}{4}$ три.
При $-\dfrac{5}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\dfrac{5}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 32 и 72. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $32+72=104$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=104\cdot 32$ и $v^2=104\cdot 72$.
Поэтому $u=16\sqrt{13}$, $v=24\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=104+40\sqrt{13}$.
Ответ: $104+40\sqrt{13}$.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD\parallel BC$, поэтому $\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB=90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD=12$, $MD=8$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD\cdot DC=MD^2=64$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC}=\dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH=\dfrac{BD\cdot DC}{AD}=\dfrac{64}{12}=\dfrac{16}{3}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH=AD-DH=12-\dfrac{16}{3}=\dfrac{20}{3}$.
Ответ: $\dfrac{20}{3}$.