Решения. Вариант 100

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Иваново — 2; Камышино — 3.
Ответ: 423.

Задание 2

Путь занимает 12 клеток.
Длина пути равна $12 \cdot 1 = 12$ км.
Ответ: 12.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{24} \cdot 60 + \frac{13}{16} \cdot 60 = 76{,}25$.
Ответ: 76,25.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 60 + 1 \cdot 650 + 1 \cdot 894 = 1784$ руб.
Иваново: $4 \cdot 55 + 1 \cdot 674 + 1 \cdot 915 = 1809$ руб.
Камышино: $4 \cdot 63 + 1 \cdot 695 + 1 \cdot 885 = 1832$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 70 + 1 \cdot 665 + 1 \cdot 870 = 1815$ руб.
Наименьшая стоимость — 1784 руб.
Ответ: 1784.

Задание 6

$(-18)^2 = 324$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $324 - 4 = 320$.
Ответ: 320.

Задание 7

Значение числа $\frac{95}{11}$ приблизительно равно $8{,}636$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{78} + 6 - 2\sqrt{78} = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 11)(x + 2) = 0$. Корни: -11 и -2.
Требуемый корень равен -11.
Ответ: -11.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 11 = 189$. Вероятность равна $\dfrac{189}{200} = 0{,}945$.

Ответ: $0{,}945$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 192}{11 + 21} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 13

Получаем $-3x > -30$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 10)$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 22-го ряда число мест увеличивается 21 раз: $24 + 21 \cdot 4 = 108$.

Ответ: 108.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, поэтому каждый равен 49°.

Ответ: 49.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 78^\circ : 2 = 39^\circ$.

Ответ: 39.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15 + 5}{2} \cdot 3 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 3 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=4-x$. Подставим во второе: $x^2+(4-x)^2=16$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-4x=0$.
Разложим на множители: $(x)(x-4)=0$. Следовательно, $x=0$ или $x=4$.
При $x=0$ первое уравнение даёт $y=4$; при $x=4$ получаем $y=0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 4, сумма их квадратов равна 16.
Ответ: $(x;y)=(0;4)$ или $(x;y)=(4;0)$.

Задание 21

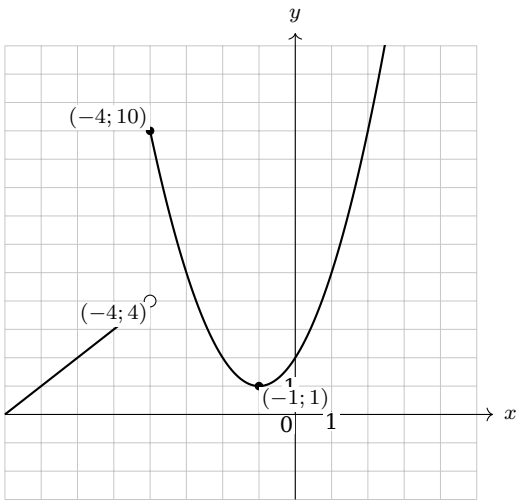
Моторная лодка прошла 84 км по течению реки и 45 км против течения, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{84}{x+3}+\dfrac{45}{x-3}=7$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $7x^2-129x+54=0$. Его корни: $x=18$ и $x=\dfrac{3}{7}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=18$ времена равны 4 ч и 3 ч, их сумма 7 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2+1, & x\geq -4,\\ x+8, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;10)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+8$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;4)$ выколота.
При $m<1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1<m<4$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $4\leq m\leq 10$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>10$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 10 включена, поскольку точка $(-4;10)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=1$ или $4\leq m\leq 10$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=48$, $BF=90$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{2304+8100}=102$.
Ответ: 102.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM=AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD=MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD=AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM=CD/2=AB/2$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 22$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 11$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 22/\cos 60^\circ = 44$.
Ответ: 44.