Решения. Вариант 101

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 4; Берёзовка — 3; Озёрное — 1.
Ответ: 431.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $22 + 14 + 48 = 84$ км.
Ответ: 84.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 36 и 48 км.
Её длина $\sqrt{36^2 + 48^2} = 60$ км.
Ответ: 60.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 22 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 50 км.
Время: $\dfrac{22}{75} \cdot 60 + \dfrac{50}{50} \cdot 60 = 77{,}6$ мин.
Ответ: 77,6.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{84 \cdot 6{,}5}{100} \cdot 79 = 431{,}34$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{60 \cdot 8}{100} \cdot 79 = 379{,}2$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{22 \cdot 6{,}5 + 50 \cdot 8}{100} \cdot 79 = 428{,}97$ руб.
Наименьшая стоимость — $379{,}2$ руб.
Ответ: 379,2.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{15}{4} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{67}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $6{,}7$.
Ответ: 6,7.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{229}$ приблизительно равно $15{,}133$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$20 + 1 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x-(1)=-\frac{1}{5}$.
$x = 0{,}8$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $0{,}8$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 25 + 5 = 40$. Благоприятных исходов 25, поэтому вероятность равна $\frac{25}{40} = 0{,}625$.
Ответ: $0{,}625$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-1}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.
Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -8 и -3. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-8; -3)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 5 \cdot 2^5 = 160$.
Ответ: 160.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
Ответ: 4.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 20}{2} = 100$.

Ответ: 100.

Задание 18

Основания равны 3 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3+5}{2} \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 64}{x - 3} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 3$. Разложим числитель: $x^2 - 64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 3, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty; -8] \cup (3; 8]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $9{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 8 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 8$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+8)$ заказа в час.

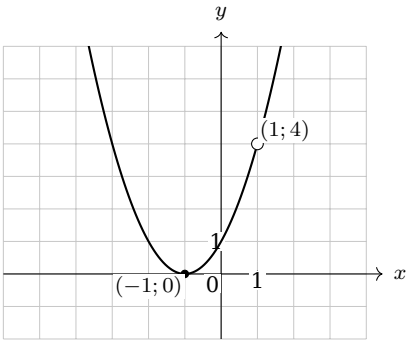
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+8} = \dfrac{5}{48}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+8) = \dfrac{48}{5}(2x+8)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 16$ и $x = -\dfrac{24}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{5}{48}$, поэтому время совместной работы равно $9{,}6$ ч.
Ответ: 16 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Строим параболу с вершиной $(-1;0)$ и выколотой точкой $(1;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 23$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 7$. Сторона $BC = BK + CK = 30$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(7 + 30) = 74$.
Ответ: 74.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 7$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 7$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 7^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 58$. Поэтому $R = \dfrac{29}{3}$.

Ответ: $\dfrac{29}{3}$.