Решения. Вариант 102

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

$V = 4{,}2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}2 = 22{,}176$ м^3.
Ответ: 22,176.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $32 : 2 = 16$ см и 30 см.
$R = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$ см.
Ответ: 34.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $35200 \cdot \dfrac{90}{100} = 31680$ руб.
Ответ: 31680.

Задание 5

Объём парной равен $22{,}176$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $35200 + 1300 = 36500$ руб.
Печь № 3: $28800 + 1300 + 6300 = 36400$ руб.
Наименьшая сумма — 36400 руб.
Ответ: 36400.

Задание 6

Сумма в скобках равна 4.
$4 : 0{,}4 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{32}$ приблизительно равно $-5{,}657$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{3 \cdot 2 - 5} = 4^1 = 4$.
Ответ: 4.

Задание 9

$5x = -79{,}5 - (-12) = -67{,}5$, поэтому $x = -13{,}5$.
Ответ: $-13{,}5$.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 49$; их 7. Вероятность равна $\dfrac{7}{50} = 0{,}14$.

Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -2x$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 242}{11^2} = 4$ кг.

Ответ: 4.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le -2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; -2]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{15} = 24 + (15-1) \cdot (-2) = -4$.
Ответ: -4.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 68° - 52° = 60°$.
Ответ: 60.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 11 \cdot 8 = 88$.
Ответ: 88.

Задание 18

Основание равно 3, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 3 \cdot 6 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 81x - 405 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+5) - 81(x+5) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+5)(x^2-81) = (x+5)(x-9)(x+9) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-9;\ -5;\ 9$.
Ответ: $-9;\ -5;\ 9$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 10 км/ч, второго 17 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $132{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $10(t - \frac{1}{4}) + 17t = \frac{265}{2}$. Отсюда $27t = 135$, то есть $t = 5$.

Второй велосипедист проехал $17 \cdot 5 = 85$ км. Время движения первого $\frac{19}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 85 км.

Задание 22

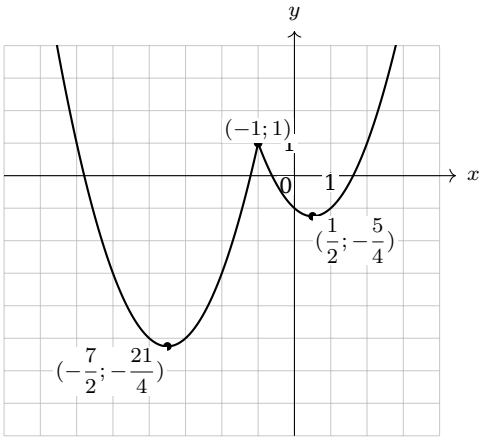
Постройте график функции $y = x^2 + 3x + 3 - 4|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t + 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{21}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.

При $m < -\frac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{21}{4}$ одно; при $-\frac{21}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.

При $-\frac{5}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 6$, $AC = 12$, $NC = 24$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 24$. По подобию $\frac{x}{x + 24} = \frac{6}{12}$.

Отсюда $12x = 6(x + 24)$, то есть $6x = 144$. Получаем $BN = 24$.

Ответ: 24.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.

Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.

Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 35$, $BC = 42$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{126}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 35 - \dfrac{126}{5} = \dfrac{49}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 42 \cdot \dfrac{\frac{49}{5}}{35} = \dfrac{294}{25}$.

Ответ: $\dfrac{294}{25}$.