Решения. Вариант 103

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{10+12+14+8}{4}=11$ ГБ.
Ответ: 11.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $570+0\cdot 2+0\cdot 60=570$ руб.
Ответ: 570.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $570+0\cdot 2+0\cdot 60=570$ руб.
«Расширенный»: $830+0\cdot 2+0\cdot 50=830$ руб.
Наименьшая плата — 570 руб.
Ответ: 570.

Задание 6

$(-16)^2=256$, $2^2=4$. Поэтому значение выражения равно $256-4=252$.
Ответ: 252.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{219}{17}$ приблизительно равно $12{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $5+2\sqrt{35}+7-2\sqrt{35}=12$.
Ответ: 12.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+5)(x+3)=0$. Корни: -5 и -3.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 25 = 175$. Вероятность равна $\dfrac{175}{200} = 0{,}875$.

Ответ: $0{,}875$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.

Ответ: 35.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 14-го ряда число мест увеличивается 13 раз: $26 + 13 \cdot 5 = 91$.
Ответ: 91.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$, поэтому каждый равен 26°.
Ответ: 26.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $42 : 2 = 21$. Вторая сторона: $21 - 6 = 15$.
Площадь равна $6 \cdot 15 = 90$.
Ответ: 90.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 4, поэтому площадь равна $8 \cdot 4 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{21}{x-28}+\frac{21}{x+28}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 28$ и $x \neq -28$.
Умножим уравнение на $(x-28)(x+28)$: $21(x+28)+21(x-28)=x^2-784$.
Получим $x^2-42x-784=0$, или $(x-21)^2=1225=35^2$.
Поэтому $x=21-35=-14$ или $x=21+35=56$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-14;\ 56$.

Задание 21

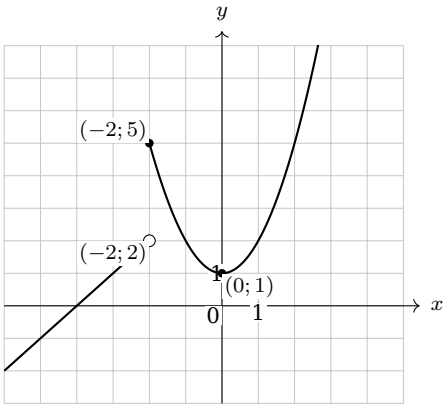
Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90-x$ кг, причём $0<x<90$.
Количество меди сохраняется: $\frac{25}{100}x+\frac{65}{100}(90-x)=\frac{45}{100}\cdot 90$.
Умножим на 100: $25x+5850-65x=4050$. Поэтому $40x=1800$ и $x=45$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 45 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x)^2 + 1, & x \geq -2, \\ x + 4, & x < -2. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0; 1)$, оставленная при $x \geq -2$. Точка $(-2; 5)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 4$ при $x < -2$. Его конечная точка $(-2; 2)$ выколота.
При $m < 1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = 1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1 < m < 2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $2 \leq m \leq 5$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m > 5$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 5 включена, поскольку точка $(-2; 5)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = 1$ или $2 \leq m \leq 5$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 35, а основание равно 42. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 42 \cdot 28 = 588$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{35 \cdot 35 \cdot 42}{4 \cdot 588} = \dfrac{175}{8}$.
Ответ: $\dfrac{175}{8}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 84$, $CD = 91$, основание $BC = 28$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 91 - 28 = 63$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 84$, $AP = BC = 28$, $PD = AD - BC = 35$.

В треугольнике CPD выполняется $84^2 + 35^2 = 91^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 84.

Площадь $S = \dfrac{63 + 28}{2} \cdot 84 = 3822$.

Ответ: 3822.