Решения. Вариант 104

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А4 — размеры № 1, А3 — размеры № 2, А6 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 90 \cdot 250}{1000} = 0{,}6993$ кг.
После округления получаем $0{,}7$ кг.
Ответ: 0,7.

Задание 5

Всего нужно $1040 \cdot 2 = 2080$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2080}{250} \right\rceil = 9$.
Стоимость: $9 \cdot 520 = 4680$ руб.
Ответ: 4680.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}5$.
Ответ: 1,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{366}$ приблизительно равно $19{,}131$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$19 + 2 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 8$. Из равенства получаем $x-(8)=-\frac{1}{8}$.
$x = 7{,}875$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $7{,}875$.

Задание 10

Всего шаров $63 + 9 + 28 = 100$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\frac{9}{100} = 0{,}09$.
Ответ: $0{,}09$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \frac{2S}{a+b} = \frac{2 \cdot 169}{10+16} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -25$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 5]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$.
Ответ: 162.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 40^\circ : 2 = 20^\circ$.
Ответ: 20.

Задание 17

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{20+7}{2} \cdot 5 = 67{,}5$.
Ответ: $67{,}5$.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 12 и 5. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 90x^2 + 729 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 90t + 729 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 81) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 81$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 81$ — $x = \pm 9$.
Ответ: $-9;\ -3;\ 3;\ 9$.

Задание 21

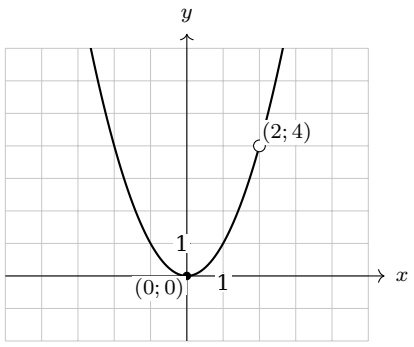
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 336 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{336}{x} - \dfrac{336}{x+2} = 3$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $672 = 3x(x+2)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 14)(x + 16) = 0$.
Корень $x = -16$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 14 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2$.
Строим параболу с вершиной $(0;0)$ и выколотой точкой $(2;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 25 и 36. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $25 + 36 = 61$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 61 \cdot 25$ и $v^2 = 61 \cdot 36$.
Поэтому $u = 5\sqrt{61}$, $v = 6\sqrt{61}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 61 + 11\sqrt{61}$.
Ответ: $61 + 11\sqrt{61}$.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \frac{9}{8} = \frac{55}{8}$.
Ответ: $\frac{55}{8}$.