Основы стереометрии: готовый урок

По трём фотографиям тетради. Тема: точки, прямые и плоскости; параллельность; скрещивающиеся прямые; первые доказательства.

К концу урока ученик сможет: различать три положения двух прямых, выбирать нужную плоскость на чертеже и объяснять решение короткими шагами.

Как провести занятие

Время	Что делаем
0–5 мин	Устно: что такое точка, прямая, отрезок и плоскость.
5–15 мин	Аксиомы и обозначения (с. 2). Три положения прямых (с. 3).
15–25 мин	Прямая и плоскость; признак параллельности; №16 (с. 4–5).
25–40 мин	№34: сначала условие и рисунок, затем разбор (с. 6–7).
40–50 мин	№35: доказательство от противного (с. 8).
50–57 мин	Самостоятельная работа: задания 1–4 на с. 10.
57–60 мин	Ученик проговаривает правила; выбираем домашние задания (с. 11).

Для занятия на 55 минут сократите устный опрос и оставьте №35 на следующий урок. Если тема новая и идёт трудно, остановитесь после №16: оставшийся материал рассчитан и на второе занятие.

Как пользоваться материалами

Резерв по конспекту: дополнительные теоремы на с. 9 и график с корнем на с. 14. Ответы к самостоятельной и домашней работе: с. 12–13. Для ученика можно распечатать с. 10–11.

№16, №34 и №35 разобраны по читаемым записям. Для №34 явно уточнено положение точки K. К неполному рисунку №37 дан отдельный аналог; это не восстановленное дословно условие.

1. Точка, прямая и плоскость

Точка A обозначает место. **Прямая AB** бесконечна в обе стороны. **Отрезок AB** ограничен точками A и B. В задачах этого урока положение сравниваем именно у прямых.

Плоскость α можно представить как ровную поверхность, бесконечную во все стороны. На рисунке показываем только её небольшой участок.



Три опорных правила - аксиомы

1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость. Например, через вершины треугольника ABC.

2. Если две различные точки прямой лежат в плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.

3. Если две различные плоскости имеют общую точку, они пересекаются по прямой, содержащей все их общие точки.

Самый частый шаг в доказательстве:
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $A \neq B \rightarrow$ прямая AB лежит в α.

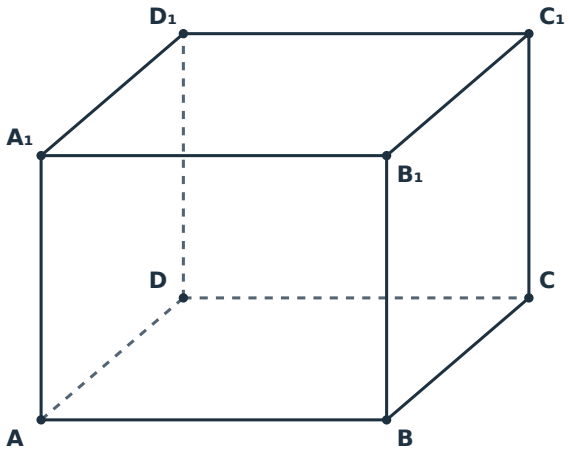
Запись	Как прочитать
$A \in \alpha$; $A \notin a$	Точка A лежит в плоскости α; точка A не лежит на прямой a.
$a \subset \alpha$; $a \cap b = \{P\}$	Прямая a лежит в α; прямые a и b пересекаются в точке P.
$a \parallel b$; $a \parallel \alpha$	Прямые a и b параллельны; прямая a параллельна плоскости α.

Устно. Сколько плоскостей проходит через прямую и точку вне её? Через две пересекающиеся прямые? В обоих случаях - ровно одна.

2. Как расположены две прямые

Положение	Общие точки	Одна плоскость
Пересекаются	Ровно одна	Есть
Параллельны	Нет	Есть
Скрещиваются	Нет	Нет

Рассматриваем две **различные** прямые. Совпадающие прямые составляют отдельный случай.



На кубе: прямые AB и BC пересекаются в B; прямые AB и CD параллельны; прямые AB и CC_1 скрещиваются.

Скрещивающиеся прямые - это прямые, которые не лежат в одной плоскости. Фразы «они не пересекаются» недостаточно: параллельные прямые тоже не пересекаются.

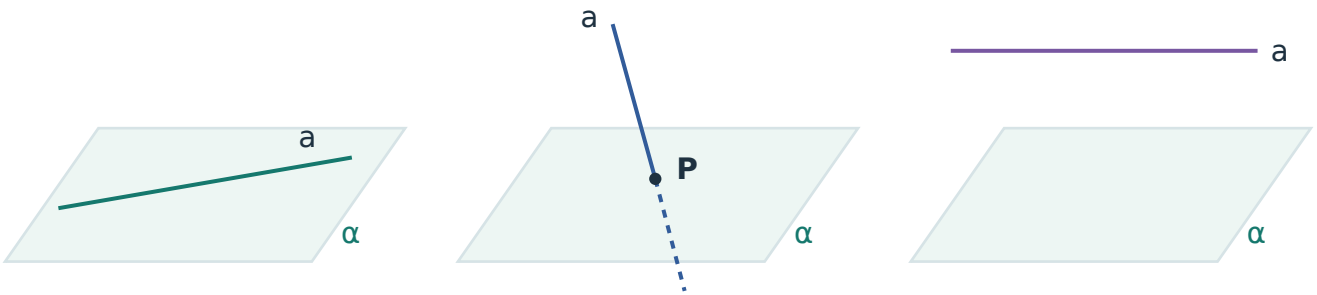
Алгоритм для ученика

Шаг 1. Есть ли общая точка? Если есть - прямые пересекаются.
Шаг 2. Если общей точки нет, можно ли поместить обе прямые в одну плоскость?
Шаг 3. Можно - параллельны. Нельзя - скрещиваются.

Проверь себя. Определи положение прямых AB и A_1B_1; AA_1 и BC; AC и BD. Ответы: параллельны; скрещиваются; пересекаются.

Линии на рисунке могут пересекаться только в проекции. Каждый вывод подтверждаем свойствами фигуры.

3. Прямая и плоскость



Лежит в α | Пересекает α | Параллельна α

Положение прямой a	Общих точек с α
Лежит в плоскости α	Бесконечно много: все точки прямой.
Пересекает плоскость α	Ровно одна.
Параллельна плоскости α	Ни одной.

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая a **не лежит** в плоскости α и параллельна некоторой прямой b, лежащей в α, то a ∥ α.

Как применять:
1. Найди в нужной плоскости прямую b.
2. Объясни, почему a ∥ b.
3. Проверь, что a не лежит в этой плоскости.
4. Сделай вывод: a ∥ α.

Пример на кубе. Прямая A_1B_1 параллельна AB. Прямая AB лежит в плоскости ABC. Прямая A_1B_1 не лежит в ABC. Значит, $A_1B_1 \parallel (ABC)$.

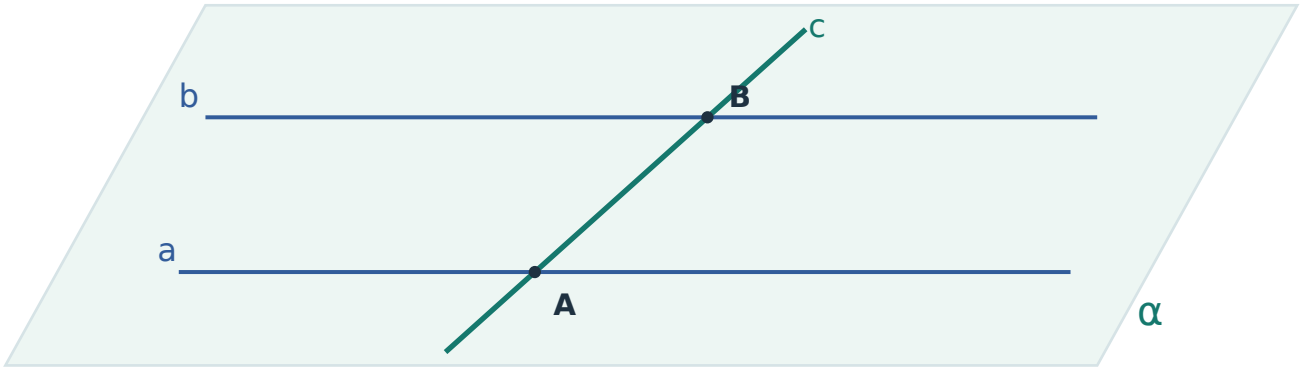
Ошибка, которую важно заметить

Из a ∥ b и b ⊂ α ещё не следует a ∥ α: сама прямая a может лежать в α. Например, две параллельные прямые нарисованы на одном листе.

Устно. Прямая имеет с плоскостью две различные общие точки. Может ли она выйти из этой плоскости? **Нет:** по второй аксиоме вся прямая лежит в ней.

4. К задаче №16: две общие точки

Условие. Различные параллельные прямые a и b лежат в плоскости α. Прямая c пересекает обе прямые. Докажите, что c лежит в плоскости α.



Разбираем по шагам

1. Назовём точки пересечения.
A = a ∩ c, B = b ∩ c.

2. Покажем, что A и B лежат в α.
A лежит на прямой a, а вся прямая a лежит в α. Поэтому A ∈ α. Точно так же B ∈ α.

3. Проверим, что это две разные точки.
Если бы A = B, прямые a и b имели бы общую точку. Это невозможно: a ∥ b. Значит, A ≠ B.

4. Используем вторую аксиому.
Прямая c проходит через две различные точки A и B плоскости α. Следовательно, c ⊂ α.

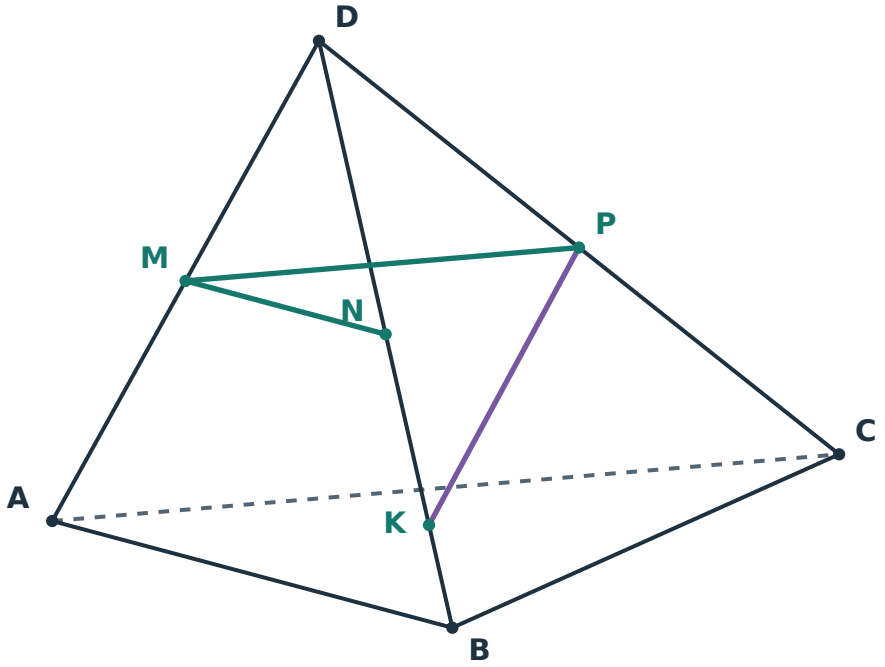
Короткая запись: A, B ∈ α; A ≠ B; A, B ∈ c.
По второй аксиоме c ⊂ α.

Вопрос ученику. Зачем в условии сказано, что a ∥ b? Чтобы гарантировать, что найденные точки A и B различны.

5. К задаче №34: сначала исследуем

Условие по тетради. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки M, N и P - середины отрезков DA, DB и DC. Точка K лежит на отрезке BN.

Уточнение для этого разбора: берём K внутри отрезка BN, то есть K ≠ B и K ≠ N. Определите взаимное расположение указанных ниже **прямых**.



Пара прямых	Мой вывод и основание
ND и AB	
PK и BC	
MN и AB	
MP и AC	
KN и AC	
MD и BC	

Подсказка. Сначала найди треугольник, в котором лежат нужные точки. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне.

Зелёным показаны отрезки MN и MP. Фиолетовым - отрезок PK. Прямые продолжаются за пределы изображённых отрезков.

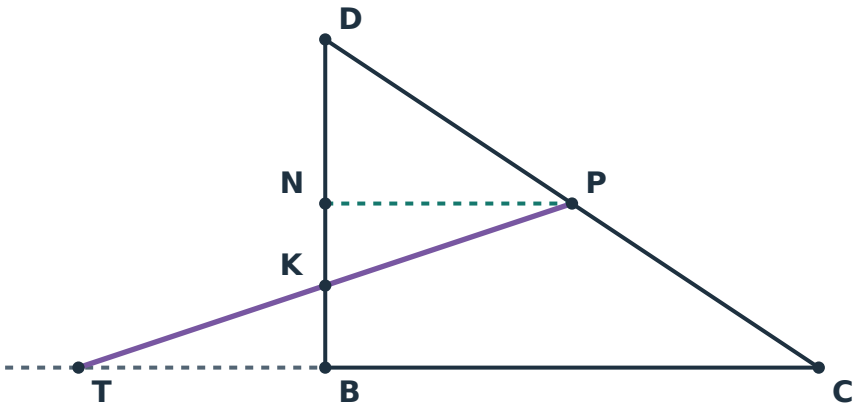
6. К задаче №34: объясняем каждый вывод

Прямые	Положение	Почему
ND и AB	Пересекаются	Прямая ND совпадает с DB. Общая точка - B.
PK и BC	Пересекаются	Обе лежат в грани DBC и не параллельны. Подробности ниже.
MN и AB	Параллельны	MN - средняя линия треугольника DAB.
MP и AC	Параллельны	MP - средняя линия треугольника DAC.
KN и AC	Скрещиваются	KN совпадает с DB. DB пересекает плоскость ABC в B, а $B \notin AC$.
MD и BC	Скрещиваются	MD совпадает с DA. DA пересекает плоскость ABC в A, а $A \notin BC$.

Почему PK и BC всё-таки пересекаются?

Грань DBC

PN ∥ BC



1. В треугольнике DBC отрезок PN - средняя линия, поэтому PN ∥ BC.
2. Через P проходит только одна прямая, параллельная BC: это PN.
3. $K \neq N$, а обе точки лежат на DB. Поэтому PK и PN - разные прямые; PK не параллельна BC.
4. PK и BC лежат в одной плоскости и не параллельны. Значит, они пересекаются в точке T на продолжении BC за B.

Тонкость условия. Если K = N, то PK = PN и PK ∥ BC, а прямая KN не определяется двумя различными точками. Поэтому положение K нужно уточнить.

7. К задаче №35: не менее одной

Условие. Через точку M, не лежащую на прямой a, проведены две различные прямые b и c. Каждая из них не имеет общих точек с a. Докажите, что хотя бы одна из прямых b и c скрещивается с a.

Идея: две параллельные провести нельзя

1. Прямая b не пересекает a. Значит, b либо параллельна a, либо скрещивается с ней. Для c возможны те же два случая.

2. Предположим обратное: ни b, ни c не скрещивается с a. Тогда обе прямые должны быть параллельны a.

3. Получается, через одну точку M проходят две различные прямые, параллельные a. Но через точку вне прямой можно провести ровно одну прямую, параллельную данной.

4. Получили противоречие. Значит, хотя бы одна из прямых b и c скрещивается с a.

Уточнение. «Хотя бы одна» означает: одна или обе. Доказывать, что скрещивается ровно одна, нельзя.

Аналог по рисунку к №37

В треугольнике ABC точка X лежит внутри стороны AB. Через X проведена прямая m, параллельная AC. Докажите, что m пересекает прямую BC.

Разбор. В плоскости ABC через X можно провести прямую, параллельную AC. По единственности это и есть m; значит, m лежит в плоскости ABC. Если бы m ∥ BC, то AC ∥ BC, поскольку обе прямые параллельны m. Но AC и BC пересекаются в C. Следовательно, m не параллельна BC и, находясь с ней в одной плоскости, пересекает её.

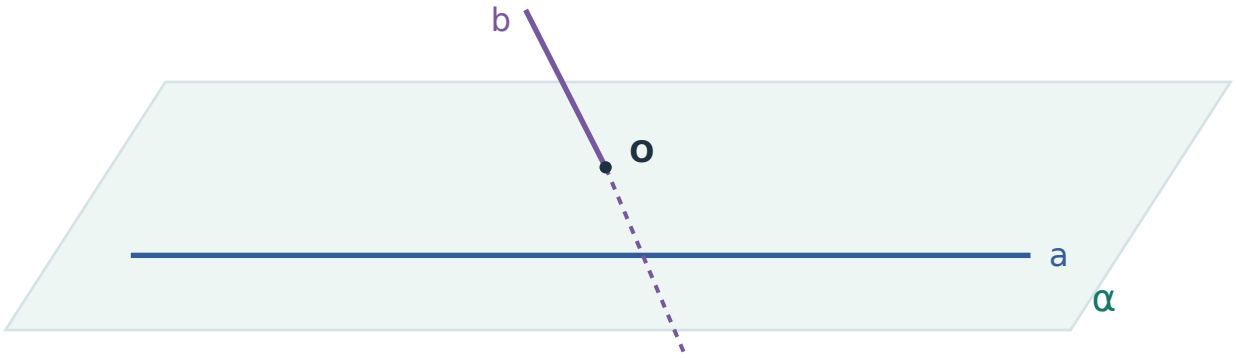
Вопрос на понимание. Почему нельзя сразу сказать: «Не параллельны - значит пересекаются»? Сначала нужно установить, что прямые лежат в одной плоскости.

Текст №37 на фотографии неполный. Приведённая задача составлена для тренировки по видимому рисунку.

8. Остальные правила из конспекта

Признак скрещивающихся прямых

Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает α в точке O, которая не лежит на a, то прямые a и b скрещиваются.



Почему? Если бы a и b лежали в одной плоскости β, то β содержала бы прямую a и точку O вне неё. Но через прямую и точку вне неё проходит ровно одна плоскость - α. Тогда b лежала бы в α, а не пересекала её в единственной точке. Противоречие.

Два полезных следствия

1. Если a ∥ α, a лежит в плоскости β и плоскости α и β пересекаются по прямой b, то a ∥ b. Иначе общая точка a и b принадлежала бы α.

2. Если a ∥ b и a ∥ α, то прямая b либо параллельна α, либо лежит в α. Она не может пересекать α ровно в одной точке: тогда параллельная ей прямая a тоже пересекала бы α.

Плоскость через одну из скрещивающихся прямых

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит ровно одна плоскость, параллельная другой прямой.

Как построить: возьми O на прямой a; проведи через O прямую b′ ∥ b. Пересекающиеся прямые a и b′ задают плоскость. Прямая b не лежит в ней, иначе a и b не были бы скрещивающимися. По признаку параллельности b параллельна построенной плоскости.

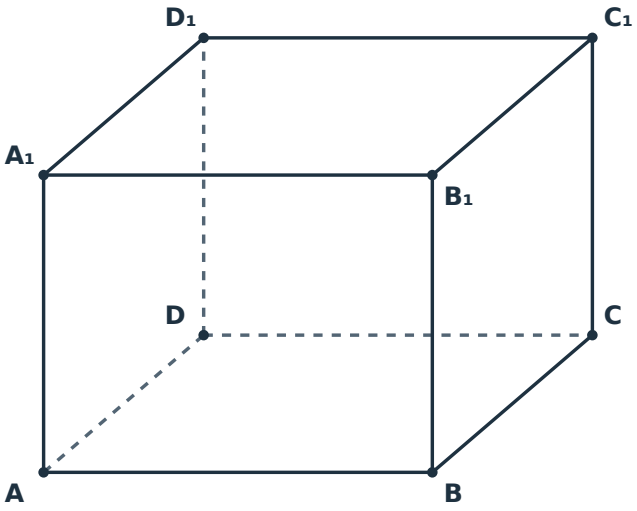
Углы с сонаправленными сторонами

Сонаправленные лучи направлены в одну сторону и лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то углы равны. Если известно только, что стороны соответственно параллельны, углы могут быть равны или в сумме давать 180°. Например: 40° и 40° либо 40° и 140°.

9. Самостоятельная работа

Имя: _____ Дата: _____

1. На кубе определите взаимное расположение прямых:
а) AB и A_1B_1; б) AB и BB_1; в) AB и CC_1; г) AC и BD.



2. Две различные точки P и Q прямой m лежат в плоскости β. Что можно сказать о прямой m? Назовите правило.

3. Точка S не лежит в плоскости треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямых SA и BC. Объясните.

4. Верно ли: «Если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны»? Приведите пример или контрпример.

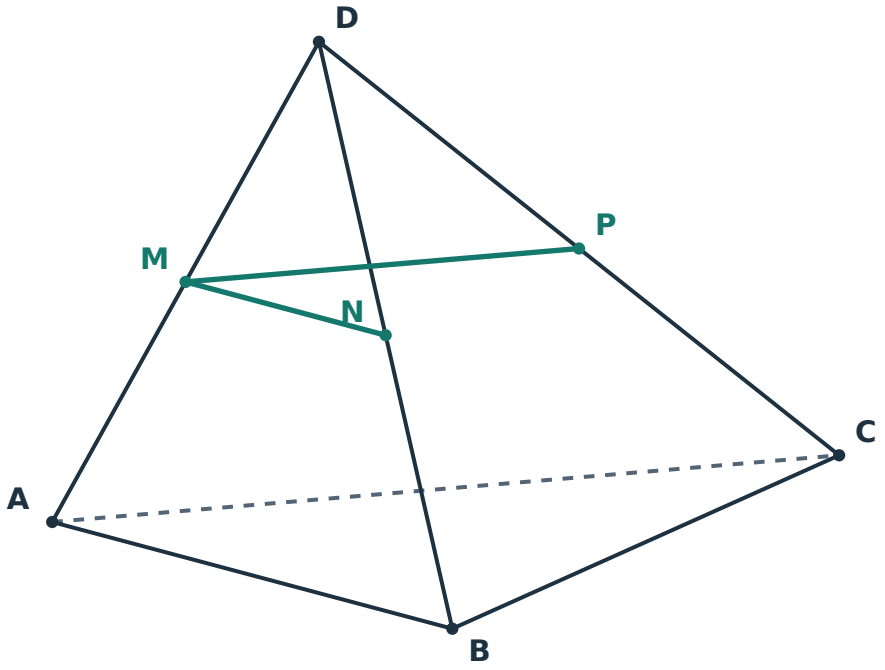
Дополнительно устно. 5. Может ли прямая иметь с плоскостью ровно две общие точки? 6. Если a ∥ b и b лежит в α, обязательно ли a ∥ α?

10. Домашняя работа

1. Заполни пропуски.
а) Две различные прямые в одной плоскости, не имеющие общих точек, называются _____.
б) Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются _____.
в) Если две различные точки прямой лежат в плоскости, то _____.

2. Аналог №16. Параллельные прямые p и q лежат в плоскости β. Прямая t пересекает p в точке E, а q в точке F. Докажите, что t лежит в β. Почему E ≠ F?

3. Аналог №34. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. M, N, P - середины отрезков DA, DB, DC. Определите положение прямых:
а) MN и AB; б) NP и BC; в) MP и AC;
г) DM и BC; д) DP и AB; е) DN и AB.



4. В той же фигуре докажите, что прямая MN параллельна плоскости ABC. Укажите все условия применяемого признака.

5. Найди ошибку. Ученик сказал: «Прямые DA и BC на моём рисунке пересеклись, поэтому они пересекаются и в пространстве». Объясните, почему этот вывод неверен.

6. По желанию. Через точку M вне прямой a проведены три различные прямые, не пересекающие a. Какое наименьшее число из них обязательно скрещивается с a? Обоснуйте.

11. Ответы к самостоятельной работе

1а. $AB \parallel A_1B_1$: это противоположные стороны грани ABB_1A_1.
1б. AB и BB_1 пересекаются в B.
1в. AB и CC_1 скрещиваются: AB лежит в плоскости ABC, а CC_1 пересекает её в точке C, не лежащей на AB.
1г. AC и BD пересекаются: это диагонали квадратной грани $ABCD$.

2. Прямая m лежит в плоскости β по второй аксиоме: две её различные точки принадлежат β.

3. Прямые SA и BC скрещиваются. Прямая BC лежит в плоскости ABC. Прямая SA пересекает эту плоскость в A: точка S находится вне неё. Точка A не лежит на BC. Применяем признак скрещивающихся прямых.

4. Неверно. Например, AB и CC_1 на кубе не имеют общих точек, но скрещиваются. Для параллельных прямых нужно ещё условие: они лежат в одной плоскости.

5. Нет. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, вся прямая лежит в ней. Тогда общих точек бесконечно много.

6. Не обязательно. Прямая a может сама лежать в α. Например, прямые AB и CD лежат в плоскости основания куба и параллельны друг другу.

Что слушать в ответах ученика

Если ученик говорит…	Уточняющий вопрос
«Скрещиваются, потому что не пересекаются».	«А чем они отличаются от параллельных? Есть ли одна плоскость, содержащая обе прямые?»
«Параллельны, потому что так нарисовано».	«Какая грань или какая теорема подтверждает параллельность?»
«PK и BC не пересекаются: отрезки не встретились».	«Мы сравниваем отрезки или бесконечные прямые? Что будет при продолжении?»

Признак усвоения: ученик называет положение прямых и добавляет хотя бы одно точное основание: общую точку, одну плоскость, среднюю линию или признак скрещивания.

12. Ответы к домашней работе

1. а) параллельными; б) скрещивающимися; в) вся прямая лежит в этой плоскости.

2. $E \in p$ и $p \subset \beta$, поэтому $E \in \beta$. Так же $F \in \beta$. Поскольку $p \parallel q$, общей точки у p и q нет; значит, $E \neq F$. Прямая t проходит через две различные точки плоскости β, следовательно, $t \subset \beta$.

Задание 3	Ответ и обоснование
а) MN и AB	Параллельны: MN - средняя линия треугольника DAB.
б) NP и BC	Параллельны: NP - средняя линия треугольника DBC.
в) MP и AC	Параллельны: MP - средняя линия треугольника DAC.
г) DM и BC	Скрещиваются: прямая DM совпадает с DA, пересекающей (ABC) в A; $A \notin BC$.
д) DP и AB	Скрещиваются: прямая DP совпадает с DC, пересекающей (ABC) в C; $C \notin AB$.
е) DN и AB	Пересекаются в B: прямая DN совпадает с прямой DB.

4. В треугольнике DAB отрезок MN - средняя линия, поэтому $MN \parallel AB$. Прямая AB лежит в плоскости ABC. Точка M не лежит в этой плоскости: иначе по точкам A и M в ней лежала бы вся прямая AD, в том числе D. Это противоречит условию. Значит, MN не лежит в (ABC). По признаку параллельности $MN \parallel (ABC)$.

5. Плоский рисунок показывает проекцию пространственной фигуры. Пересечение проекций не означает общей точки в пространстве. DA пересекает плоскость ABC в A, а A не принадлежит BC. Следовательно, DA и BC скрещиваются.

6. Не менее **двух**. Через M проходит только одна прямая, параллельная a. Значит, среди трёх различных прямых не более одной может быть параллельна a. Остальные не пересекают a и не параллельны ей, поэтому скрещиваются с ней. Это число достижимо: можно взять одну параллельную a и две скрещивающиеся с a прямые через M.

13. Дополнительно: график с корнем

На одном из разворотов также записана функция **y = 2 − √(2x − 1)**. Этот блок можно использовать как повторение перед геометрией или оставить на следующее занятие.

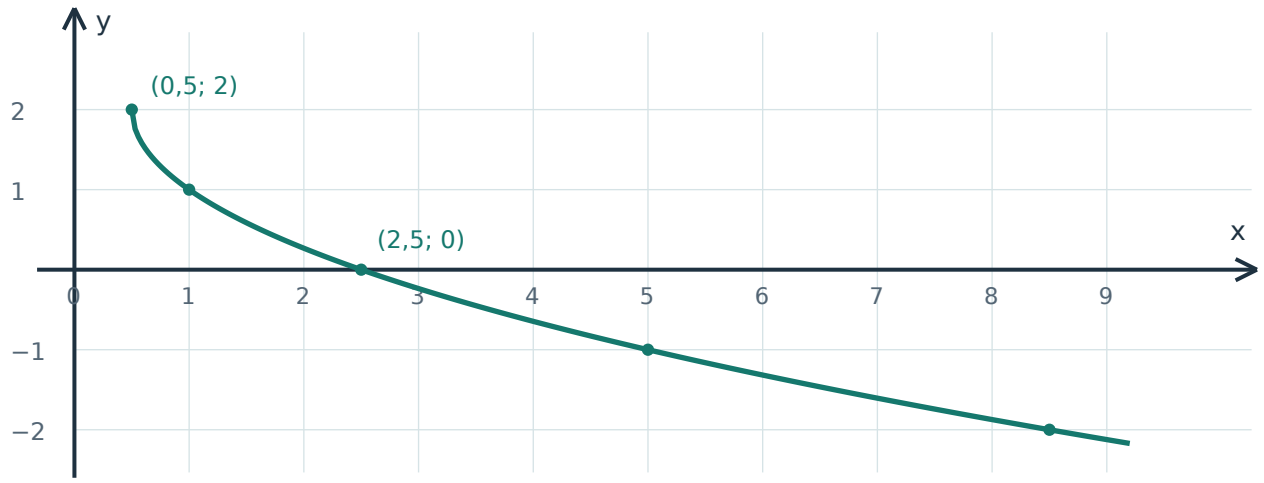
Шаг 1. Где функция определена?

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:
2x − 1 ≥ 0 → x ≥ 0,5. Начальная точка графика: (0,5; 2).

Шаг 2. Выбираем удобные значения

Удобно брать 2x − 1 равным 0, 1, 4, 9, 16: из этих чисел корень извлекается точно.

2x − 1	0	1	4	9	16
x	0,5	1	2,5	5	8,5
y	2	1	0	−1	−2



Что читаем по графику: область определения [0,5; +∞); область значений (−∞; 2]; нуль функции x = 2,5. Функция убывает. Ось Oy не пересекает: x = 0 не входит в область определения.

Частая ошибка. Здесь x ≥ 0,5, а не x > 0,5: квадратный корень из нуля существует. Правая часть графика продолжает уходить вниз; горизонтальной асимптоты нет.

Попробуй сам: y = 3 − √(x − 2). Найди область определения, начальную точку, нуль и область значений.
Ответ: [2; +∞); (2; 3); x = 11; (−∞; 3].