Параллельность плоскостей

Продолжение урока от 29 октября. Занятие на 55-60 минут.

Цель занятия

Ученик узнаёт нужную конфигурацию, называет основания каждого шага и доказывает параллельность плоскостей двумя направлениями.

План урока

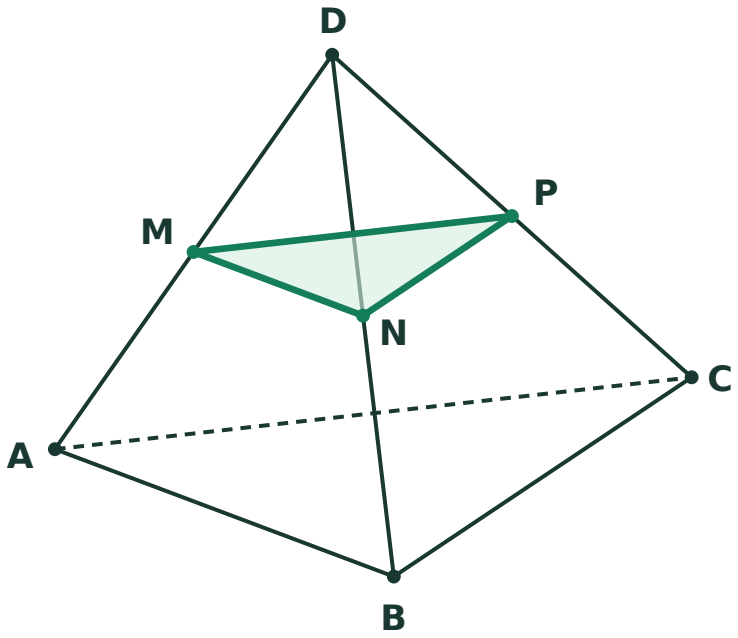
0-5 мин	Проверить прошлое ДЗ: почему MN ∥ (ABC)? Вернуть различие «лежит в плоскости» и «параллельна плоскости».
5-17 мин	Исследовать две плоскости и признак параллельности. Сравнить верную конфигурацию и контрпример с одной парой прямых.
17-27 мин	Доказать: если m ⊂ α и α ∥ β, то m ∥ β. Ученик собирает короткое доказательство.
27-38 мин	Параллельные линии пересечения с третьей плоскостью. Затем равные отрезки параллельных прямых.
38-52 мин	Вернуться к тетраэдру DABC. Доказать (MNP) ∥ (ABC), вычислить стороны сечения.
52-60 мин	Три итоговых вопроса, самостоятельная попытка в тренажёре и выдача ДЗ.

Если доказательства требуют больше времени, после признака и задачи о прямой завершите первый урок. Свойства и тетраэдр перенесите на следующий; не ускоряйте объяснение ради расписания.

1. Мостик из прошлого урока

Знакомый рисунок помогает увидеть новую идею.

В тетраэдре DABC точки M, N, P - середины DA, DB, DC. В прошлом ДЗ уже было доказано MN ∥ (ABC).



Сначала спросить, потом показать

В какой плоскости искать MN? В плоскости треугольника DAB. В нём MN - средняя линия, поэтому MN ∥ AB.

Почему MN не лежит в (ABC)? Точка M находится внутри DA, а DA пересекает (ABC) только в A. Поэтому M ∉ (ABC).

Что можно сказать о MP? В треугольнике DAC это средняя линия: MP ∥ AC. Аналогично MP ∥ (ABC).

Новый вопрос

Теперь в плоскости (MNP) найдены две пересекающиеся прямые MN и MP. Они задают два разных направления. В плоскости (ABC) им соответствуют AB и AC.

2. Признак: нужны два направления

На рисунке показаны участки бесконечных плоскостей.

Признак параллельности плоскостей

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти две различные плоскости параллельны.

Проверяем пять пунктов: принадлежность первой пары одной плоскости; принадлежность второй пары другой; пересечение прямых в каждой паре; две соответствующие параллельности; различие плоскостей.

Почему одной пары недостаточно?



Представьте пол и стену. На полу есть прямая a, на стене - прямая b, и a ∥ b. При этом плоскости пересекаются по прямой c. Одна общая направленность не запрещает плоскостям «поворачиваться» друг относительно друга.

Вопрос на понимание

Попросите ученика показать на модели второе направление. Если обе выбранные прямые параллельны друг другу, это по-прежнему только одно направление: признак не выполнен.

3. Прямая внутри одной плоскости

Дано: α ∥ β и m ⊂ α. Доказать: m ∥ β.



Короткое доказательство

1. У параллельных плоскостей α и β нет общих точек.

2. Все точки прямой m принадлежат α.

3. Поэтому ни одна точка m не может принадлежать β.

4. Значит, m не имеет общих точек с β, то есть m ∥ β.

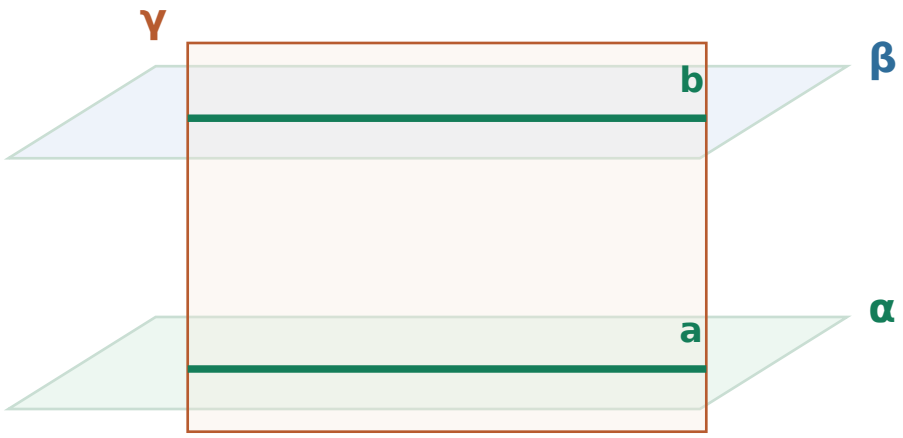
Та же мысль через предположение

Предположим, m встретила β в точке K. Так как m ⊂ α, точка K принадлежит и α. Получилась общая точка параллельных плоскостей - противоречие.

Попросите ученика закончить фразу: «Любая прямая плоскости α параллельна β, потому что...». Не принимайте «так видно на рисунке» за обоснование.

4. Третья плоскость и две линии

Дано: α ∥ β, γ ∩ α = a, γ ∩ β = b.



Свойство

Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны: a ∥ b.

Почему это верно

1. Прямые a и b обе лежат в плоскости γ. Поэтому они не могут быть скрещивающимися.

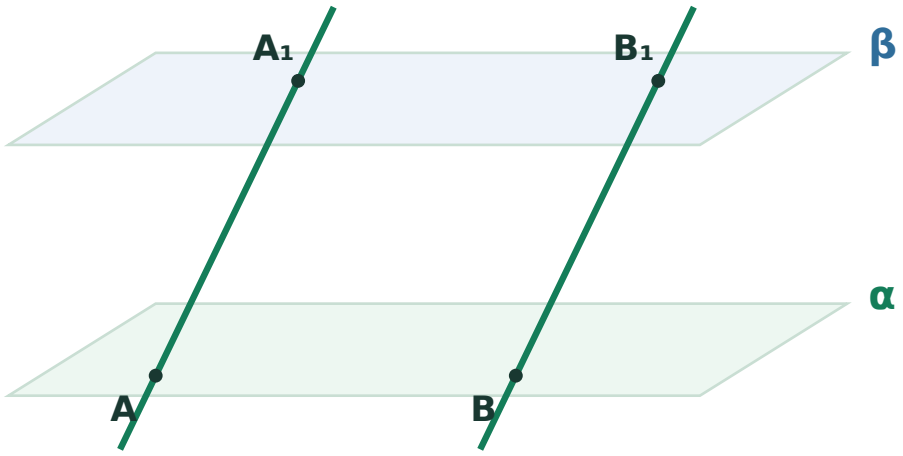
2. Они не пересекаются: иначе их общая точка принадлежала бы и α, и β.

3. Прямые a и b различны, лежат в одной плоскости и не имеют общей точки. Следовательно, a ∥ b.

Вопрос: зачем нужна плоскость γ? Она гарантирует, что две прямые лежат в одной плоскости. Для произвольных прямых в пространстве фразы «не пересекаются» недостаточно.

5. Равные отрезки между плоскостями

Прямые AA_1 и BB_1 параллельны; $A, B \in \alpha$; $A_1, B_1 \in \beta$; $\alpha \parallel \beta$.



Свойство

Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны: $AA_1 = BB_1$.

Через две различные параллельные прямые проходит одна плоскость. В ней $AB \parallel A_1B_1$ по предыдущему свойству, а $AA_1 \parallel BB_1$ по условию. Четырёхугольник ABB_1A_1 - параллелограмм, поэтому $AA_1 = BB_1$.

Числовой пример

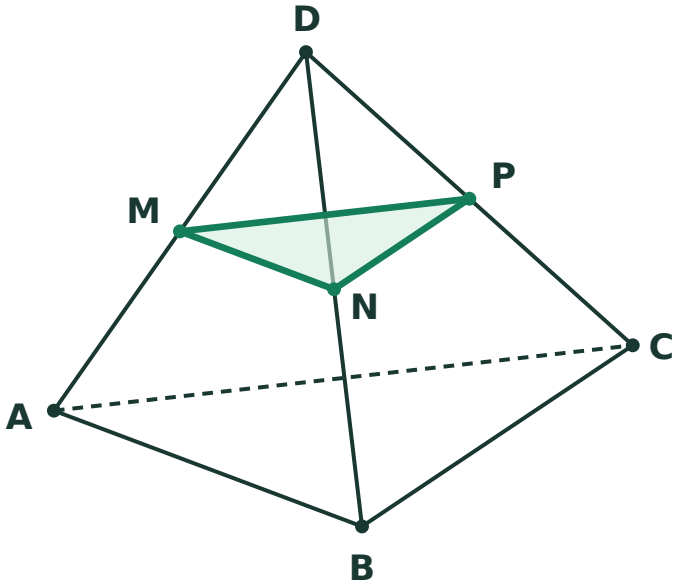
Пусть $AA_1 = 3x - 6$, $BB_1 = x + 2$. Тогда
$3x - 6 = x + 2 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$.
Проверка: $AA_1 = BB_1 = 6$. Обе длины положительны.

Не перепутать

Равенство требует параллельности самих прямых. Две произвольные наклонные прямые могут отрезать между этими же плоскостями отрезки разной длины.

6. Тетраэдр: от прямых к плоскостям

DABC - тетраэдр; M, N, P - середины DA, DB, DC.



Доказательство. MN ∥ AB и MP ∥ AC как средние линии треугольников DAB и DAC. Прямые MN и MP пересекаются в M, а AB и AC - в A. Обе первые прямые лежат в (MNP), обе вторые - в (ABC). Плоскости различны, поскольку M ∉ (ABC). По признаку (MNP) ∥ (ABC).

Расчёт после доказательства

Если AB = 10, AC = 14, BC = 16, то MN = 5, MP = 7, NP = 8. Периметр треугольника MNP равен 20. Каждый вывод о длине получаем в соответствующем плоском треугольнике.

Три итоговых вопроса

1. Почему одной пары параллельных прямых недостаточно?
2. Почему следы a и b в третьей плоскости не скрещиваются?
3. Какое условие нужно для равенства AA_1 и BB_1?

Критерий готовности: ученик самостоятельно называет две пары направлений и общую плоскость нужных прямых. Если он только узнаёт рисунок, повторите контрпример и попросите объяснить словами.